

附和水准路线平差计算

一、算法实现

1. 水准测量的基本原理

水准测量是使用水准仪和水准尺，根据水平视线测定两点之间的高差，从而由已知点推求未知点的高程。如图 1 所示，已知 A 点的高程为 H_A ，A 点与 B 点的高差测量值是 h_{AB} ，于是 B 点的高程 H_B 为：

$$H_B = H_A + h_{AB} \quad (1)$$

其中 A 点称为后视点，a 为后视读数，B 为前视点，b 为前视读数。

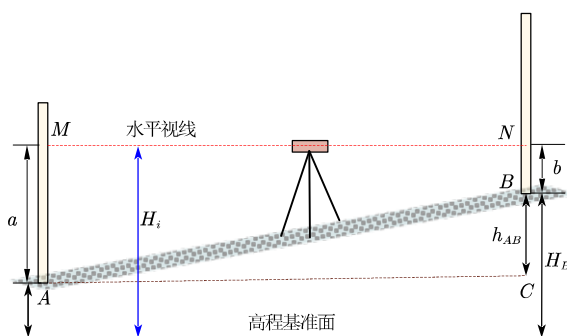


图 1 水准测量原理示意图

当两点之间的距离较远或者高差较大时，需要加设若干个临时的立尺点，作为传递高程的过渡点，即转点，基本测量方法为：（1）将水准尺立于已知高程的水准点上作为后视，安置水准仪和前视点。圆水准气泡粗平，瞄准后视尺，精平，读数。旋转望远镜瞄准前视尺，精平读数。记录、计算高差。（2）后尺和测站向前移动，前尺不动并转为第二测站的后尺，原后尺变为前尺，同第一站的方法一样继续向前观测。

2. 数据记录与测站检查

（1）水准测量数据记录

对于利用数字水准仪测量的数据，可以采用表 1 所示记录手簿进行检核，表中（1）至（4）是后视-前视读数，分别为后距、后视中丝、前距、前距中丝读数，（5）至（8）是前视-后视读数，分别为前距、前距中丝、后距、后视中丝读数。

表 1 水准测量的观测记录与数据检查手簿

测站 编号	后视点 名	后距 1	后距 2		后视中 丝 1	后视中 丝 2	后视中 丝差	
	前视点 名	前距 1	前距 2	距离差 d	前视中 丝 1	前视中 丝 2	前视中 丝差	
	后-前	距离差 1	距离差 2	Σd	高差 1	高差 2	中丝差	高差
		(1)	(7)		(2)	(8)	(10)	
		(3)	(5)	(14)	(4)	(6)	(9)	
		(12)	(13)	(15)	(16)	(17)	(11)	(18)
1	P24	106.4965	106.4982		0.8187	0.8175	0.0012	
	转点 1	103.7130	103.7138	2.7840	1.0776	1.0759	0.0017	
	后-前	2.7835	2.7844	2.7840	-0.2589	-0.2584	-0.0005	-0.2587

说明：采用数字水准仪测量时，无需进行上丝和下丝读数，下表的设计省略了相关部分，与传统的三（四）等水准测量观测手簿有所不同。

(2) 测站数据计算

对每一站的测量结果需要进行检验，只有当检验通过之后，才能进行下一站的测量。在表 1 中的第(9)至(18)是计算数据。

表中(9)至(11)是高差部分，其中(9)是前视标尺的黑红面读数(或两次读数)之差，(10)后视标尺的黑红面读数(或两次读数)之差，(11)是黑红面所测的高差，计算方法为：

$$\begin{cases} (9) = (4) - (6) \\ (10) = (2) - (8) \\ (11) = (10) - (9) \end{cases} \quad (2)$$

表中(9)至(11)是视距部分，其中(12)是后视距离之差，(13)是前视距离之差，(14)是前后视距差，(15)为前后视距累计差，计算公式为：

$$\begin{cases} (12) = (1) - (3) \\ (13) = (7) - (5) \\ (14) = [(12) + (13)] / 2 \\ (15) = \text{本站的}(14) + \text{前站的}(15) \end{cases} \quad (3)$$

表(16)为黑面所得到的高差，(17)是红面所得到的高差，(18)是本站高差，计算公式为：

$$\begin{cases} (16) = (2) - (4) \\ (17) = (8) - (6) \\ (18) = [(16) + (17)] / 2 \end{cases} \quad (4)$$

说明：（1）在计算报告中输出如表 1 所示的水准测量记录与水准检查成果；（2）在上述内容在表格中显示。

（3）测站超限检查

如果测站上有关观测限差超限，在本站检查发现后可立即重测。若迁站后才检查发现，则应该从水准点或间歇点起，重新观测。三、四等水准测量作业限差如表 2 所示。

表 2 三、四水准测量作业限差

等级	三等	四等
仪器类型	S3	S3
标准视线长度（m）	65	80
后前视距差（m）	3.0	5.0
后前视距差累计（m）	6.0	10.0
黑红面读数差（mm）	2.0	3.0
黑红面所测高差之差（mm）	3.0	5.0
监测间歇点高程之差（mm）	3.0	5.0

说明：对每站进行限差统计并输出，与表 2 中四等作业限差进行比较，在计算报告中给是否超限的说明。

3. 附和水准路线的近似的平差计算公式

（1）水准路线闭合高差计算

附和水准路线是水准测量中的常用方法，如图 2 所示。图中 A、B 高程分别为 H_A 、 H_B ，测量得到高差依次为 $h_1, \dots, h_n$ ，相应的距离为 $L_1, \dots, L_n$ 。

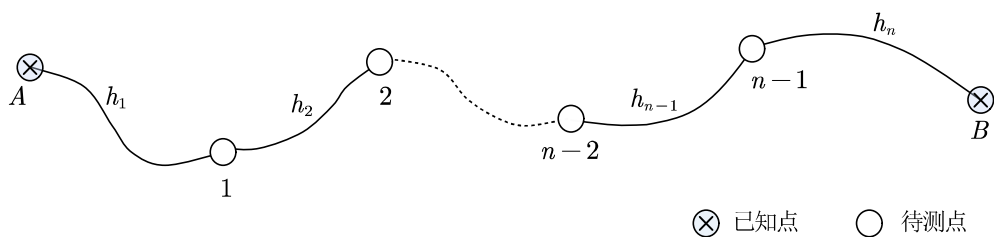


图 2 附和水准路线示意图

计算水准路线的高程闭合差 f_h ，即：

$$f_h = \sum_{i=1}^n h_i - (H_B - H_A) \quad (5)$$

说明：在计算报告中输出高程闭合差，小数点后保留 3 位数值。

(2) 高差改正数计算

计算各段高差改正数 v_i

$$v_i = -\frac{f_h}{\sum_{i=1}^n L_i} \cdot L_i \quad (6)$$

计算各测段观测高差的平差值 $\bar{h}_i$ 和待定点高程平差值 H_i ，即：

$$\begin{cases} \bar{h}_i = h_i + v_i \\ H_i = H_A + \bar{h}_1 + \cdots + \bar{h}_i \end{cases} \quad (7)$$

说明：(1) 在计算报告中输出各测段观测高差改正数 v_i 和距离 L_i ，小数点后保留 3 位数值；(2) 在计算报告中输出待定点的高差平差值 H_i ，小数点后保留 3 位数值。

4. 矩阵运算

设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 的矩阵，其定义如下所示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

(1) 采用伴随矩阵法求逆

A 的逆矩阵计算公式：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 其中 M_{ij} 为余子式, 计算公式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} a_{1,i} \det(A_{1,i}), & 2 \leq n \\ a_{1,1}, & n = 1 \end{cases} \quad (11)$$

说明：对数据文件中的 A 矩阵，进行求逆，将计算结果在计算报告中输出，小数点后保留 3 位数值。

(2) 矩阵相乘

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times s$ 矩阵, $B = (b_{ij})$ 是一个 $s \times n$ 矩阵, 矩阵 A 与矩阵 B 的乘积

是一个 $m \times n$ 的矩阵 $C = (c_{ij})$, 其中

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} \quad (i = 1, 2 \cdots m; j = 1, 2 \cdots n)
\end{aligned}
\tag{12}$$

说明：对数据文件中的 A 矩阵和 B 矩阵，进行相乘运算，将计算结果在计算报告中输出，小数点后保留 3 位数值。

(3) 矩阵转置

设 $A = (a_{ij})$ 是一个 $m \times n$ 的矩阵，A 的转置为 $n \times m$ 的矩阵 $A^T = (a_{ji})$ 。

说明：对数据文件中的 A 矩阵，进行转置运算，将计算结果在计算报告中输出，小数点后保留 3 位数值。

5. 附和水准路线的间接平差

使用近似平差后的高程值作为近似高程坐标，得到 2.2 中的 (18) 关于以未知点的高程作为参数的方程，然后建立误差方程，法方程，间接平差。

(1) 建立误差方程

针对本题的水准路线，建立误差方程

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}}_V = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \vdots \\ -\hat{x}_{n-2} + \hat{x}_{n-1} \\ -\hat{x}_{n-1} \end{pmatrix}}_{BX} - \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 + H_A - X_1^0 \\ h_2 + X_1^0 - X_2^0 \\ \vdots \\ h_{n-1} + X_{n-2}^0 - X_{n-1}^0 \\ X_{n-1}^0 - H_B + h_n \end{pmatrix}}_L
\tag{13}$$

其中 X 矩阵为 $[\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \cdots \quad \hat{x}_{n-2} \quad \hat{x}_{n-1}]^T$

其中 v_i 为高差 h_i 的改正数， $\hat{x}_i$ 为第 i 个点高程平差值， X_i^0 为第 i 个点的高程近似值。

说明：在计算报告中输出 L 矩阵，小数点后保留 6 位数值。

(2) 间接平差

取 10km 的观测高差为单位权观测，即按 $P_i = \frac{C}{S_i} = \frac{10}{S_i}$ 定权，得到观测值的权阵

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

组成法方程

$$\underbrace{B^T PB}_N \hat{x} = B^T PL \tag{15}$$

得到最小二乘解

$$\hat{x} = (B^T PB)^{-1} B^T PL = N^{-1} B^T PL \tag{16}$$

说明：在计算报告中输出 $\hat{x}$ 、 N^{-1} 这 3 个矩阵，小数点后保留 6 位数值。

(3) 计算改正后的高程

根据 5.2 的计算结果计算改正后的高程

说明：在计算报告中输出改正后的高程，小数点后保留 3 位数值。

三、数据文件读取和计算报告输出

1. 数据文件读取

编程读取“正式数据.txt”文件，数据内容如表 3 所示。

表 3 数据内容

P96, 248. 197
P47, 246. 980
P96, -1, 59. 1975, 0. 6581, 59. 1216, 0. 8432, 59. 1195, 0. 8416, 59. 1958, 0. 6564

-1, -1, 59.2505, 0.6596, 59.1746, 0.8251, 59.1726, 0.8235, 59.2488, 0.6580
-1, Q08, 59.3032, 0.6611, 59.2273, 0.8072, 59.2253, 0.8057, 59.3016, 0.6595
Q08, -1, 59.3554, 0.6625, 59.2795, 0.7899, 59.2776, 0.7885, 59.3539, 0.6610
-1, -1, 59.4070, 0.6639, 59.3311, 0.7734, 59.3293, 0.7720, 59.4055, 0.6624
-1, -1, 59.4579, 0.6651, 59.3820, 0.7577, 59.3802, 0.7564, 59.4565, 0.6638
-1, B42, 59.5079, 0.6664, 59.4320, 0.7430, 59.4303, 0.7418, 59.5066, 0.6651
.....
1, 3
3, 4
1, 3, 2
2, 4, 5

数据格式说明如表 4 所示。

表 4 数据格式说明

点名，已知高程
点名，已知高程
起点，终点，后视距离，后视中丝读数，前视距离，前视中丝读数，前视距离，前视中丝 读数，后视距离，后视中丝读数（当点名为-1 时表示转点）
矩阵 A（用于矩阵求逆和转置的测试）
矩阵 B（用于矩阵乘积测试）

2. 计算报告的显示与保存

说明：（1）将相关统计信息、计算报告在用户界面中显示，在《开发文档》给出 1 张相关截图；（2）保存为文本文件（*.txt），并将计算的成果插入到《开发文档》中。

四、程序优化

1. 人机交互界面设计与实现

要求：（1）包括菜单、工具条、表格、图形（显示）、文本等功能，要求功能正确、可正常运行，布局合理、直观美观、人性化；（2）在《开发文档》中，给出 1 至 2 张相关的界面截图。

2. 图形绘制、并保存

（1）图形绘制

要求：（1）以到第一个基准点的距离为 X 坐标，高程作为 Y 坐标，；（2）在《开发文档》中，给出 1 张用图形显示界面的截图。

（2）图形文件保存

要求：（1）将“图形绘制”的图形保存为 DXF 格式的文件；（2）在《开发文档》中，给出 1 张用 CAD 打开的保存图形文件的界面。

五、开发文档

内容包括：（1）程序功能简介；（2）算法设计与流程图；（3）主要函数和变量说明；（4）主要程序运行界面；（5）使用说明。

六、源程序与参考答案

附合水准路线平差 (LevelAdjust) V1.1						
文件(F) 计算(C) 查看						
Adj						
	后视点名	前视点名	后距1	后距2	前距1	前距2
▶	P51	-1	51.23	51.231	49.954	49.953
	-1	-1	75.354	75.356	75.801	75.802
	-1	-1	78.357	78.355	78.233	78.232
	-1	B68	78.872	78.872	80.92	80.92
	B68	-1	76.722	76.723	74.205	74.203
	-1	-1	66.262	66.261	58.631	58.63
	-1	-1	77.088	77.09	73.789	73.787
	-1	-1	69.76	69.761	72.895	72.893
	-1	-1	69.015	69.014	71.677	71.679
	-1	B01	69.957	69.958	66.651	66.65
	B01	-1	68.607	68.608	65.012	65.014
数据 图形 报告						

图 3 用户界面样例

说明：本章内容是 2018 年全国大学生测绘技能大赛测绘程序设计试题，有部分改动。