第6章 通用平差程序

朱晓峻

Email：zhuxiaojunahu@126.com

QQ：302838249

安徽大学 资源与环境工程学院

学习内容

Contents

- 平差知识回顾
- 水准路线平差程序设计
- 水准网平差实现

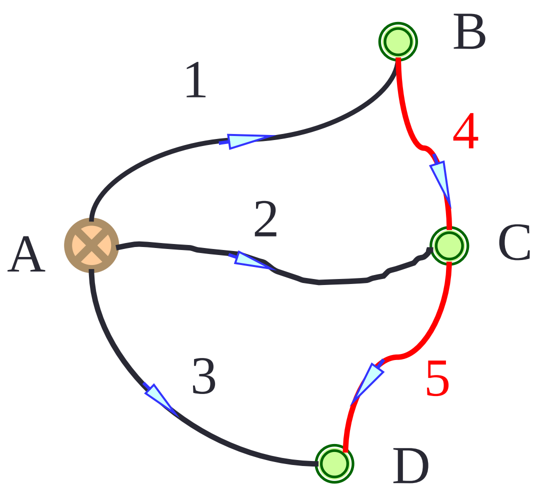
测绘程序设计

6.1 平差知识回顾

条件平差原理

间接平差原理

条件平差原理



$$\left.\begin{aligned}\tilde{L}_1+\tilde{L}_4-\tilde{L}_2=0\\ \tilde{L}_2+\tilde{L}_5-\tilde{L}_3=0\end{aligned}\right\}\quad r\text{个}$$

$$\hat{L}_i=L_i+V_i$$

$\hat{L}_i$ —平差值　V_i —改正数

$$\left.\begin{aligned}\hat{L}_1-\hat{L}_2+\hat{L}_4=0\\ \hat{L}_2-\hat{L}_3+\hat{L}_5=0\end{aligned}\right\}\text{—条件方程}$$

- 必要观测数 t=3
- 观测数 n=5
- 多余观测数 r

$r=n-t=2$

r：自由度

条件方程个数唯一，但是形式不唯一

条件平差原理

- ✓ 对于给定的几何观测模型，若观测值个数为n，必须观测数为t，则多于观测数r为

$$\boldsymbol{r=n-t}, \quad (\boldsymbol{n>t})$$

- ✓ 设有r个评差值线性条件方程

$$\begin{cases} a_1\hat{L}_1+a_2\hat{L}_2+\cdots+a_n\hat{L}_n+a_0=0 \\ b_1\hat{L}_1+b_2\hat{L}_2+\cdots+b_n\hat{L}_n+b_0=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1\hat{L}_1+r_2\hat{L}_2+\cdots+r_n\hat{L}_n+r_0=0 \end{cases}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Delta}, \quad \hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}+\hat{\boldsymbol{\Delta}}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{V}$$

条件平差原理

$$\begin{cases} a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_a=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_b=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n+w_r=0 \end{cases}$$

条件方程的闭合差，或称不符值

$$\begin{cases} w_a=a_1L_1+a_2L_2+\cdots+a_nL_n+a_0 \\ w_b=b_1L_1+b_2L_2+\cdots+b_nL_n+b_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_r=r_1L_1+r_2L_2+\cdots+r_nL_n+r_0 \end{cases}$$

条件平差原理

$$\begin{cases} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n + w_a = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n + w_b = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n + w_r = 0 \end{cases}$$

$$\underset{r,n}{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}, \underset{r,1}{W} = \begin{bmatrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}, \underset{n,1}{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$AV + W = 0$$

$$W = AL + A_0$$

$$A\hat{L} + A_0 = 0$$

条件平差原理

● 基础方程及其解

改正数条件方程 $\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}+\underset{r,1}{W}=0$

✓ 由于$r<n$，不能求得V的唯一解，为此，按最小二乘原理，改正数V须满足：

$$V^T P_{LL} V = min$$

✓ 按求函数极值的拉格朗日乘数法，设定r个待定系数，组成向量：

$$\underset{r,1}{K}=\begin{pmatrix} k_a & k_b & \cdots & k_r \end{pmatrix}^T$$

✓ 称为联系数向量。组成函数

$$\underset{1,1}{\Phi}=\underset{1,n}{V^T}\underset{n,n}{P}\underset{n,1}{V}-2\underset{1,r}{K^T}\left(\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}+\underset{r,1}{W}\right)$$

条件平差原理

● 基础方程及其解

✓ 改正数方程与条件方程联立，称为条件平差的基础方程。

条件方程 $\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}+\underset{r,1}{W}=0$ n个方程，r个未知数

改正数方程 $\underset{n,1}{V}=P_{LL}^{-1}A^T\underset{r,1}{K}=Q_{LL}A^T\underset{r,1}{K}$ r个方程，n个未知数

方程个数与未知数个数相同，方程有唯一解。

✓ 将改正数方程代入条件方程，得

$$\underset{r,n}{A}\underset{n,n}{Q}\underset{n,r}{A^T}\underset{r,1}{K}+\underset{r,1}{W}=\underset{r,1}{\mathbf{0}}$$

条件平差原理

- 基础方程及其解

$$\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{Q}\,\underset{n,r}{A^T}\,\underset{r,1}{K}+\underset{r,1}{W}=\underset{r,1}{\mathbf{0}}$$

令

$$\underset{r,r}{N_{aa}}=\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{Q}\,\underset{n,r}{A^T}=\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{P^{-1}}\,\underset{n,r}{A^T}$$

则有

$$\underset{r,r}{N_{aa}}\,\underset{r,1}{K}+\underset{r,1}{W}=0$$

—— 联系数法方程

秩

$$R\left(\underset{r,r}{N_{aa}}\right)=R\left(\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{Q}\,\underset{n,r}{A^T}\right)=R\left(\underset{r,n}{A}\right)=r$$

即 N_{aa} 是 r 阶的满秩方阵，可逆。

条件平差原理

- 基础方程及其解

由此可解出：

$$\underset{r,1}{K} = -\underset{r,r}{N_{aa}^{-1}}\underset{r,1}{W}$$

$$\underset{r,r}{N_{aa}}\underset{r,1}{K} + \underset{r,1}{W} = 0$$

代入改正数方程

$$\underset{n,1}{V} = P_{LL}^{-1}A^T\underset{r,1}{K} = -Q_{LL}A^T\underset{r,r}{N_{aa}^{-1}}\underset{r,1}{W}$$

平差值

$$\hat{L} = L + V$$

条件平差原理

- 基础方程及其解
  - ✓ 当P为对角阵时

$$\underset{n,n}{Q}=\underset{n,n}{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n}\end{pmatrix}$$

$$\underset{r,r}{N_{aa}}=\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{Q}\,\underset{n,r}{A^T}=\underset{r,n}{A}\,\underset{n,n}{P^{-1}}\,\underset{n,r}{A^T}=\begin{pmatrix}\left[\frac{aa}{p}\right] & \left[\frac{ab}{p}\right] & \cdots & \left[\frac{ar}{p}\right]\\ \left[\frac{ab}{p}\right] & \left[\frac{bb}{p}\right] & \cdots & \left[\frac{br}{p}\right]\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left[\frac{ar}{p}\right] & \left[\frac{br}{p}\right] & \cdots & \left[\frac{rr}{p}\right]\end{pmatrix}$$

条件平差原理

● 基础方程及其解

✓ 当P为对角阵时，法方程的纯量形式为

$$
\left.\begin{array}{l}
\left[\frac{aa}{p}\right]k_a+\left[\frac{ab}{p}\right]k_b+\cdots+\left[\frac{ar}{p}\right]k_r+w_a=0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right]k_a+\left[\frac{bb}{p}\right]k_b+\cdots+\left[\frac{br}{p}\right]k_r+w_b=0 \\
\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\
\left[\frac{ar}{p}\right]k_a+\left[\frac{br}{p}\right]k_b+\cdots+\left[\frac{rr}{p}\right]k_r+w_r=0
\end{array}\right\}
$$

条件平差原理

- 基础方程及其解
  - ✓ 当P为对角阵时，改正数法方程的纯量形式为

$$\underset{n,1}{V} = P_{LL}^{-1} A^T \underset{r,1}{K}$$

$$v_i = \frac{1}{p_i}\left(a_i k_a + b_i k_b + \cdots + r_i k_r\right), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

条件平差原理

- 基础方程及其解

1、根据具体问题列立条件方程式

$$\underset{r,1}{F}\left(\underset{n,1}{\hat{L}}\right)=\underset{r,1}{0} \qquad \underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}+\underset{r,1}{W}=0$$

$$\underset{r,n}{A}=\left.\frac{\partial F}{\partial \tilde{L}}\right|_{L}, \quad \underset{r,1}{W}=F\left(\underset{n,1}{L}\right)$$

2、观测值定权，确定随机模型

$$\underset{n,n}{Q_{LL}}=\underset{n,n}{P_{LL}^{-1}}$$

3、组成联系数法方程

$$\underset{r,r}{N_{aa}}\underset{r,1}{K}+\underset{r,1}{W}=0$$

$$\underset{r,r}{N_{aa}}=\underset{r,n}{A}\underset{n,n}{Q}\underset{n,r}{A^T}=\underset{r,n}{A}\underset{n,n}{P^{-1}}\underset{n,r}{A^T}$$

4、解算联系数

$$\underset{r,1}{K}=-\underset{r,r}{N_{aa}^{-1}}\underset{r,1}{W}$$

5、计算改正数

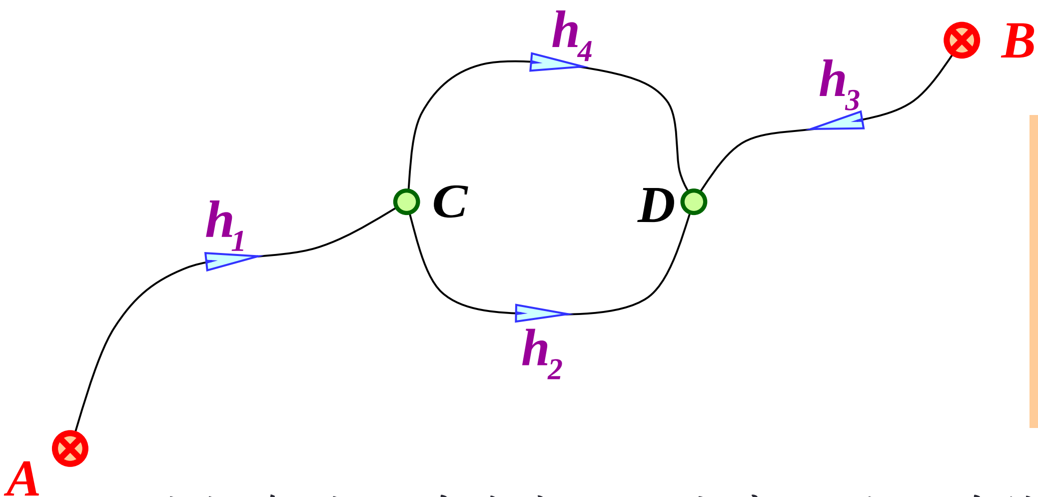
$$\underset{n,1}{V}=P_{LL}^{-1}A^T\underset{r,1}{K}$$

6、计算平差值

$$\hat{L}=L+V$$

➢ 条件平差步骤示例

下图中A、B为已知水准点，其高程$H_A=+12.013m$，$H_B=+10.013m$。为了确定C、D点高程，共观测了四个高差，高差观测值及相应水准路线的路线长度为



$h_1=-1.004\ m$,	$s_1=2\ km$
$h_2=+1.516\ m$,	$s_2=1\ km$
$h_3=+2.512\ m$,	$s_3=2\ km$
$h_4=+1.520\ m$,	$s_4=1.5\ km$

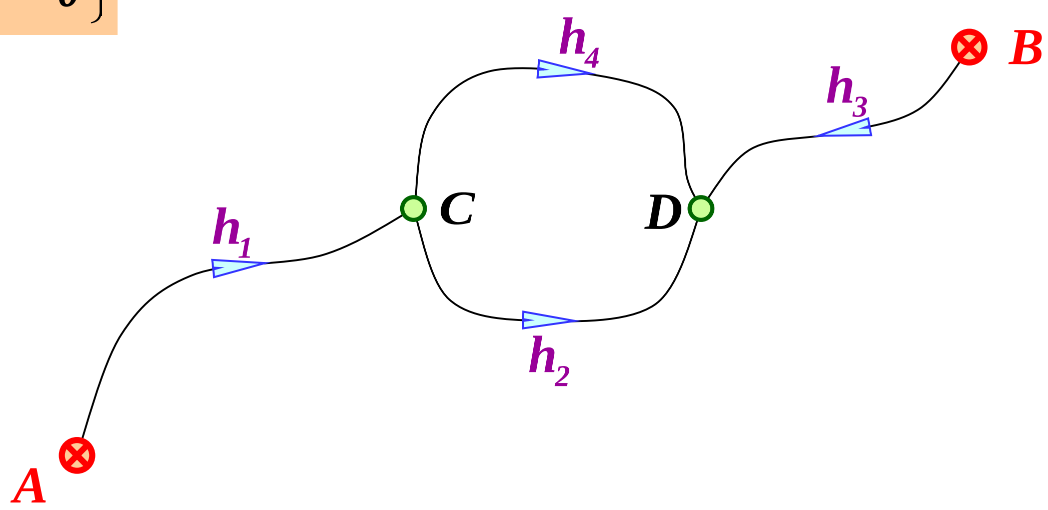
试按条件平差法求C、D点高程的平差值。

条件平差步骤示例

解：此例$n=4$，$t=2$，$r=n-t=2$，可列出两个条件方程。

1、列条件方程：

$$\left.\begin{array}{r}\hat{h}_1+\hat{h}_2-\hat{h}_3+H_A-H_B=0\\ \hat{h}_2-\hat{h}_4=0\end{array}\right\}$$



条件平差原理

➢条件平差步骤示例

2、计算改正数条件方程闭合差

$$\left.\begin{aligned} w_a &= h_1 + h_2 - h_3 + H_A - H_B = 0 \\ w_b &= \quad h_2 \quad - h_4 \quad = -4 \end{aligned}\right\}$$

3、列改正数条件方程

$$\left.\begin{aligned} v_1 + v_2 - v_3 \quad + 0 = 0 \\ v_2 \quad - v_4 - 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

或

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

➢条件平差步骤示例

4、确定观测值的权，令$C=1$，则由定权公式

$$p_i = \frac{C}{S_i} = \frac{1}{S_i}$$

有

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

➢条件平差步骤示例

5、组成法方程，求联系数K

$$N_{aa}=AP^{-1}A^{T}=\begin{pmatrix}1&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&2.5\end{pmatrix}$$

法方程为：

$$\begin{pmatrix}5&1\\1&2.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_a\\k_b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

解出

$$K=\begin{pmatrix}k_a\\k_b\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}5&1\\1&2.5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.35\\1.74\end{pmatrix}$$

➢ 条件平差步骤示例

6、求观测值改正数和平差值，并检核

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}=P^{-1}A^TK=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.35 \\ 1.74 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.4 \\ 0.7 \\ -2.6 \end{pmatrix}(mm)$$

代入改正数条件方程检核，无误

条件平差原理

➢条件平差步骤示例

$$\hat{h}=\begin{pmatrix}\hat{h}_1\\ \hat{h}_2\\ \hat{h}_3\\ \hat{h}_4\end{pmatrix}=h+v=\begin{pmatrix}-1.0047\\ 1.5174\\ 2.5127\\ 1.5174\end{pmatrix}(m)$$

代入条件方程检核，无误。

7、求C、D点高程平差值

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}\hat{H}_C\\ \hat{H}_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{H}_A+\hat{h}_1\\ \hat{H}_B+\hat{h}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.0083\\ 12.5257\end{pmatrix}(m)$$

条件平差原理

条件平差步骤示例

整个步骤流程中最关键的地方在于列出正确的条件方程式

条件方程的列立要求

1、条件式数目等于多余观测数r；

2、条件式之间线性无关。

间接平差原理

➢ 间接平差原理

- ✓ 一个几何观测模型中，必需元素应为t个函数独立的几何量。若选取t个必需元素作为模型参数。那么，该几何模型中的所有其它几何量均可表达为这t个独立参数的函数。

- ✓ 若将每一个观测量表达成t个所选参数的函数，即可列出n个这种函数关系式，以此为平差的函数模型，称为**间接平差法**，又称为参数平差法。

间接平差原理

✓ **例题1：**如图，水准网观测模型：

$$n=8,\quad t=4,\quad r=n-t=4$$

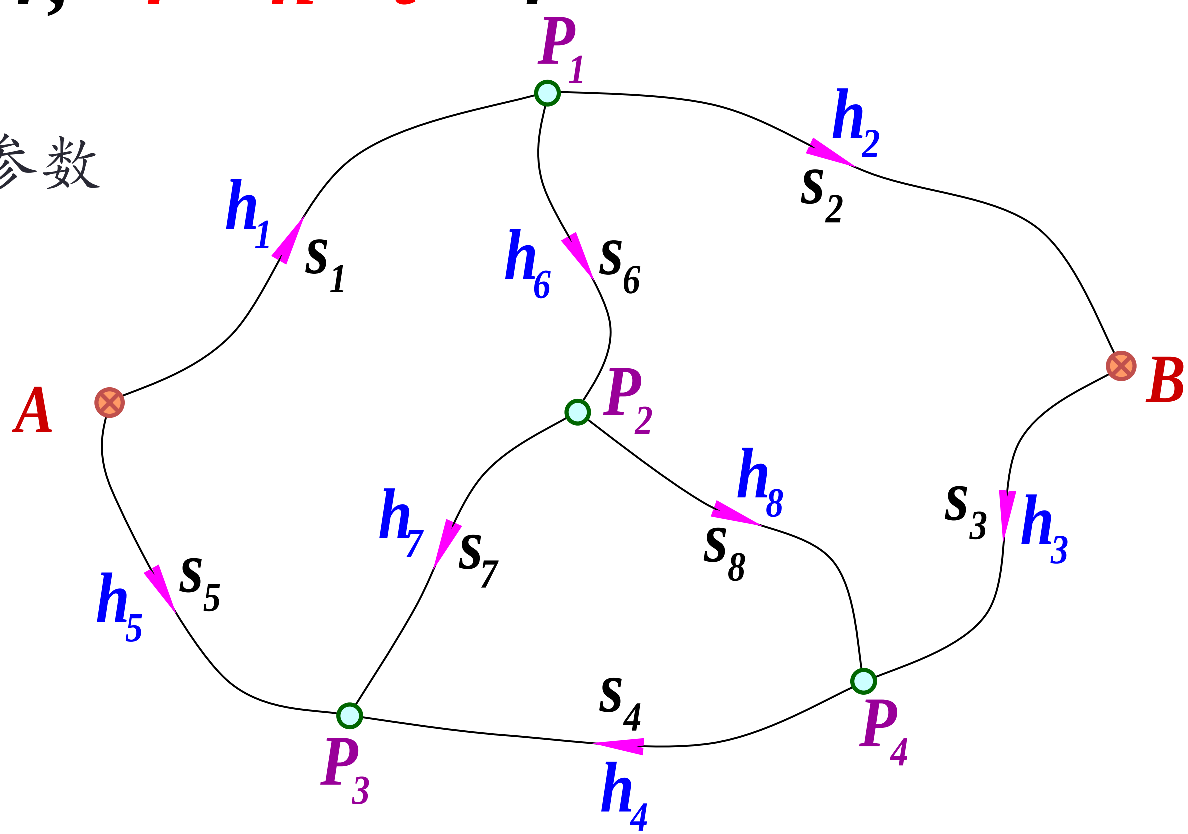
✓ 可选择4个独立参数

$$\tilde{X}_1 = H_{P_1}$$

$$\tilde{X}_2 = H_{P_2}$$

$$\tilde{X}_3 = H_{P_3}$$

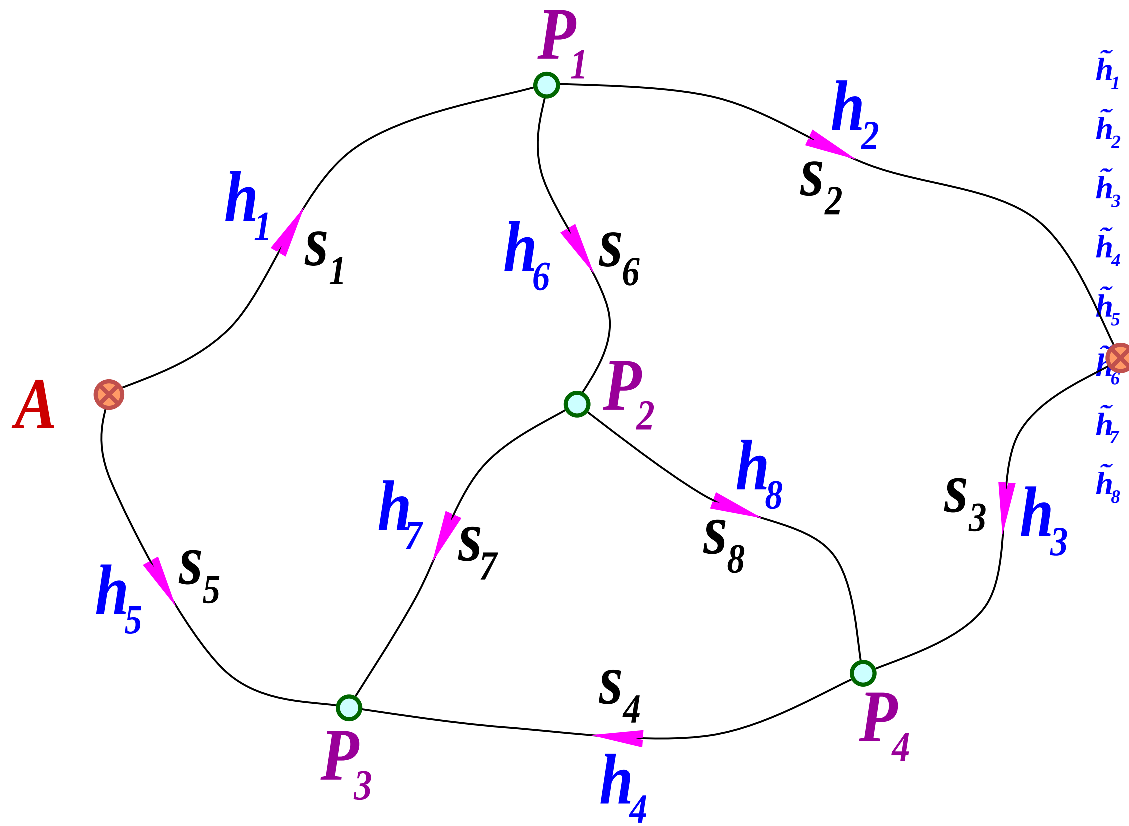
$$\tilde{X}_4 = H_{P_4}$$



间接平差原理

✓ 将各观测量表达为模型参数的函数：

$$n=8,\quad t=4,\quad r=n-t=4$$

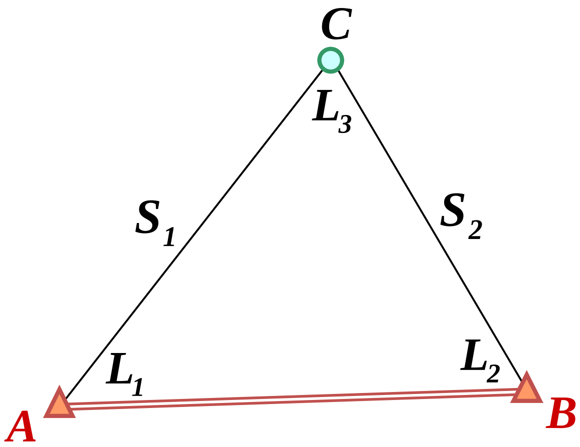


$$\tilde{h}_1=\tilde{X}_1-H_A$$
$$\tilde{h}_2=-\tilde{X}_1+H_B$$
$$\tilde{h}_3=\tilde{X}_4-H_B$$
$$\tilde{h}_4=\tilde{X}_3-\tilde{X}_4$$
$$\tilde{h}_5=\tilde{X}_3-H_A$$
$$\tilde{h}_6=-\tilde{X}_1+\tilde{X}_2$$
$$\tilde{h}_7=-\tilde{X}_2+\tilde{X}_3$$
$$\tilde{h}_8=-\tilde{X}_2+\tilde{X}_4$$

间接平差原理

✓ **例题2：** 右图为边角网观测模型：

$$n=5,\ t=2,\ r=n-t=3$$



设C点坐标为模型参数：

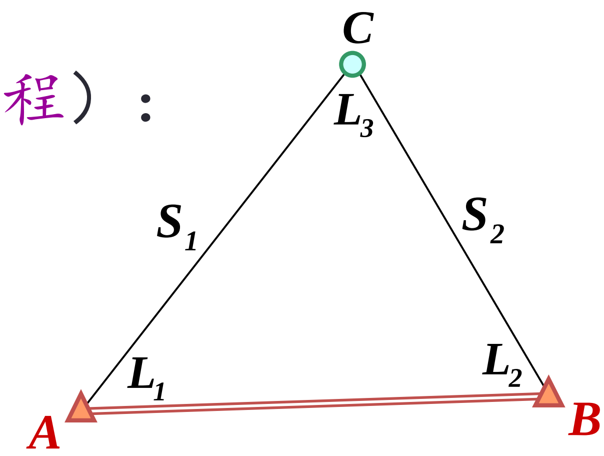
$$\underset{2,1}{\hat{X}}=\begin{pmatrix}\hat{X}_C & \hat{Y}_C\end{pmatrix}^T$$

注意：相限角转换为方位角

$$\alpha_{AB}=\arctan\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

间接平差原理

✓ 观测量平差值方程（简称，观测方程）：



$$\hat{L}_1 = \alpha_{AB} - \hat{\alpha}_{AC} = -\arctan\frac{\hat{Y}_C - Y_A}{\hat{X}_C - X_A} + \alpha_{AB}$$

$$\hat{L}_2 = \hat{\alpha}_{BC} - \alpha_{BA} = \hat{\alpha}_{BC} - \left(\alpha_{AB} + 180\right) = \arctan\frac{\hat{Y}_C - Y_B}{\hat{X}_C - X_B} - \left(\alpha_{AB} + 180\right)$$

$$\hat{L}_3 = \hat{\alpha}_{CA} - \hat{\alpha}_{CB} = \left(\hat{\alpha}_{AC} + 180\right) - \left(\hat{\alpha}_{BC} + 180\right) = \arctan\frac{\hat{Y}_C - Y_A}{\hat{X}_C - X_A} - \arctan\frac{\hat{Y}_C - Y_B}{\hat{X}_C - X_B}$$

$$\hat{S}_1 = \sqrt{\left(\hat{X}_C - X_A\right)^2 + \left(\hat{Y}_C - Y_A\right)^2}$$

$$\hat{S}_2 = \sqrt{\left(\hat{X}_C - X_B\right)^2 + \left(\hat{Y}_C - Y_B\right)^2}$$

间接平差原理

● 平差值方程和误差方程

✓ 设观测模型的必要观测数为t，选取t个独立模型参数$\underset{t,1}{\tilde{X}}$，间接平差函数模型为其观测方程，如下：

$$\underset{n,1}{\tilde{L}} = \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{\tilde{X}}\right)$$

✓ 观测方程线性化：

$$\underset{n,1}{L} + \underset{n,1}{\Delta} = \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^0} + \underset{t,1}{\tilde{x}}\right) = \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^0}\right) + \left.\frac{\partial \underset{n,1}{F}(\underset{t,1}{\tilde{X}})}{\partial \tilde{X}}\right|_{X^0} \underset{t,1}{\tilde{x}} = \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^0}\right) + \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}}$$

间接平差原理

● 平差值方程和误差方程

$$\underset{n,1}{L}+\underset{n,1}{\Delta}=\underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^{0}}+\underset{t,1}{\tilde{x}}\right)=\underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^{0}}\right)+\left.\frac{\partial \underset{n,1}{F}(\underset{t,1}{\tilde{X}})}{\partial \tilde{X}}\right|_{X^{0}}\underset{t,1}{\tilde{x}}=\underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^{0}}\right)+\underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}}$$

$$\underset{n,1}{\Delta}=\underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}}-\left(\underset{n,1}{L}-\underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^{0}}\right)\right)=\underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}}-\underset{n,1}{l}$$

其线性形式为：

$$\underset{n,1}{\Delta}=\underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}}-\underset{n,1}{l},\qquad \underset{n,t}{B}=\left.\frac{\partial \underset{n,1}{F}(\underset{t,1}{\tilde{X}})}{\partial \tilde{X}}\right|_{X^{0}},\qquad \underset{n,1}{l}=\underset{n,1}{L}-\underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^{0}}\right)$$

间接平差原理

- 平差值方程和误差方程

$$\underset{n,1}{\Delta} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\tilde{x}} - \underset{n,1}{l} \qquad \underset{n,1}{l} = \underset{n,1}{L} - \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{X^0}\right)$$

✓ 由于方程个数 n < 未知数个数 $n+t$，不能求得 Δ 和 $\tilde{x}$ 的唯一解，只能按最小二乘原理求 Δ 和 $\tilde{x}$ 的最佳估值 V 和 $\hat{x}$，从而求得观测量 $\tilde{L}$ 和 $\tilde{X}$ 的最佳估值 $\hat{L}$ 和 $\hat{X}$，即

$$\hat{L} = L + V \qquad \hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

间接平差原理

- 平差值方程和误差方程

✓ 用平差值和改正数表示间接平差的函数模型：

— 平差值方程（观测方程）

$$\underset{n,1}{\hat{L}} = F\left(\underset{t,1}{\hat{X}}\right)$$

$$\underset{n,1}{L} + \underset{n,1}{V} = F\left(\underset{t,1}{X^0} + \underset{t,1}{\hat{x}}\right) = F\left(X^0\right) + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X^0} \underset{t,1}{\hat{x}} = F\left(X^0\right) + B \underset{t,1}{\hat{x}}$$

— 误差方程

$$\underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l}, \quad \underset{n,t}{B} = \left.\frac{\partial \underset{n,1}{F}(\underset{t,1}{\hat{X}})}{\partial \hat{X}}\right|_{X^0}, \quad l = L - F\left(X^0\right)$$

间接平差原理

$$\underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l}$$

- 基础方程

✓ 误差方程中未知数个数$n+t$大于方程个数n，方程有无穷多组解。根据最小二乘原理可求得满足方程的唯一一组解。

✓ 求V^TPV的自由极值得：

$$\frac{\partial\left(V^TPV\right)}{\partial\hat{x}} = 2V^TP\frac{\partial V}{\partial\hat{x}} = 2V^TP\frac{\partial\left(B\hat{x}-l\right)}{\partial\hat{x}} = 2V^TPB = 0$$

转置，即：

$$\left(V^TPB\right)^T = \underset{t,n}{B^T}\ \underset{n,n}{P}\ \underset{n,1}{V} = 0$$

间接平差原理

- 基础方程

✓ 上式与误差方程联立得基础方程

$$\begin{cases} \underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \\ \underset{t,n}{B^T}\,\underset{n,n}{P}\,\underset{n,1}{V} = 0 \end{cases}$$

✓ 方程中未知数个数与方程个数相等，方程有唯一解。

间接平差原理

$$\begin{cases} \underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \\ \underset{t,n}{B^T}\underset{n,n}{P}\underset{n,1}{V} = 0 \end{cases}$$

- 基础方程的解

✓ 将基础方程第一式代入第二式得

$$B^T P\left(B\hat{x} - l\right) = B^T PB\hat{x} - B^T Pl = 0$$

令

$$N_{BB} = B^T PB, \quad W = B^T Pl$$

则有

$$N_{BB}\hat{x} - W = 0$$

✓ 秩 $R(N_{BB}) = R\left(B^T PB\right) = R(B) = t$，即 N_{BB}是个t阶的满秩方阵，由此可解出

$$\hat{x} = N_{BB}^{-1}W \qquad \underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{n,1}{l} \qquad \underset{n,1}{\hat{L}} = \underset{n,1}{L} + \underset{n,1}{V}$$

间接平差原理

➢间接平差原理

●基础方程的解

1、列立平差值方程/误差方程

$$\underset{n,1}{\hat{L}} = \underset{n,1}{F}\left(\underset{t,1}{\hat{X}}\right) = \underset{n,1}{F}\left(X^0 + \underset{t,1}{\hat{x}}\right),$$

$$\underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{r,1}{l}$$

$$\underset{n,t}{B} = \underset{n,t}{\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X^0}}, \quad \underset{n,1}{l} = \underset{n,1}{L} - F\left(\underset{t,1}{X^0}\right)$$

2、观测值定权，确定随机模型

$$\underset{n,n}{Q_{LL}} = \underset{n,n}{P_{LL}^{-1}}, \quad \underset{n,n}{P_{LL}} = \underset{n,n}{Q_{LL}^{-1}}$$

3、组成参数改正数法方程

$$\underset{t,t}{N_{BB}}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{t,1}{W} = 0$$

$$\underset{t,t}{N_{BB}} = \underset{t,n}{B^T}\,\underset{n,n}{P_{LL}}\,\underset{n,t}{B}$$

4、解算参数改正数

$$\underset{t,1}{\hat{x}} = \underset{t,t}{N_{BB}^{-1}}\,\underset{t,1}{W}$$

5、计算改正数

$$\underset{n,1}{V} = \underset{n,t}{B}\,\underset{t,1}{\hat{x}} - \underset{r,1}{l}$$

6、计算平差值

$$\hat{L} = L + V$$

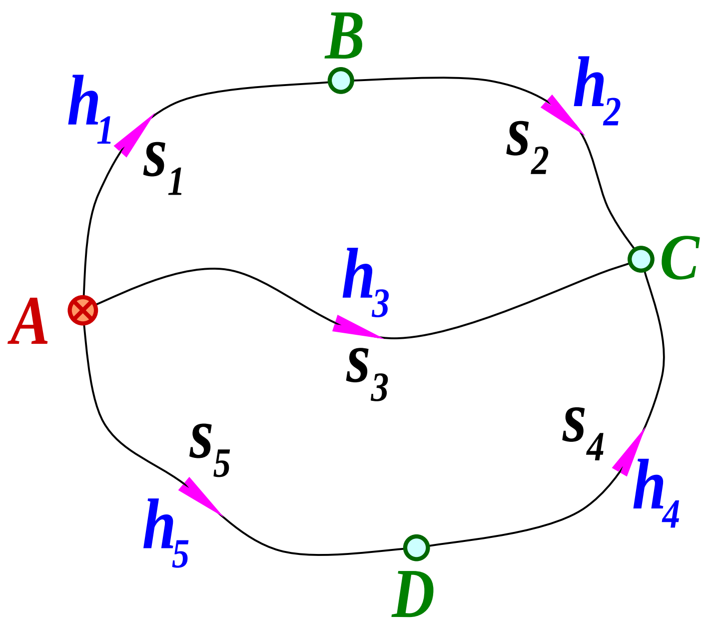
间接平差原理

➢ 间接平差原理

间接平差步骤及示例

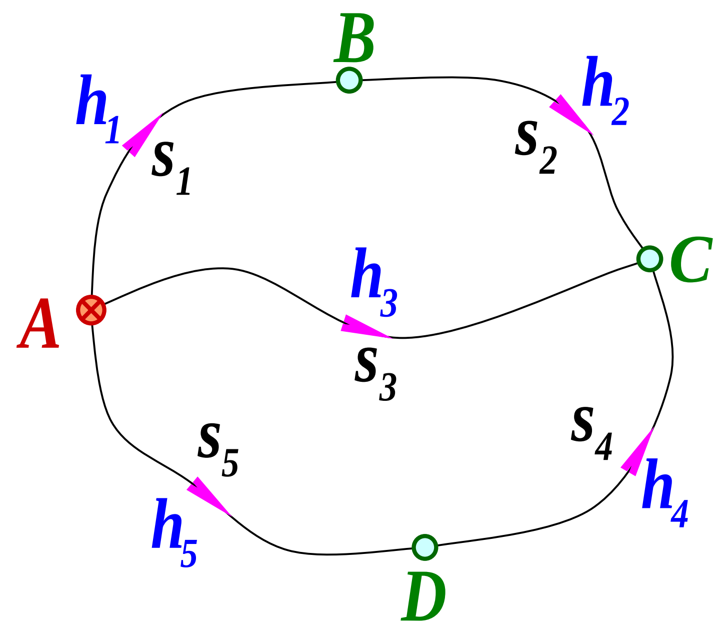
✓ 下图中A为已知水准点，其高程$H_A=237.483m$，为了确定B、C、D点高程，共观测了5个高差，高差观测值及相应水准路线的路线长度为

$$h_1=5.835m,\quad s_1=3.5km;$$
$$h_2=3.782m,\quad s_2=2.7km;$$
$$h_3=9.640m,\quad s_3=4.0km;$$
$$h_4=7.384m,\quad s_4=3.0km;$$
$$h_5=2.270m,\quad s_5=2.5km.$$



间接平差原理

- ✓ 试按间接平差法求*B*、*C*、*D*点高程的平差值。
- ✓ 解：此例*n=5*，*t=3*，应选*3*个独立参数，列出*5*个方程方程。



1、选参数，计算参数近似值

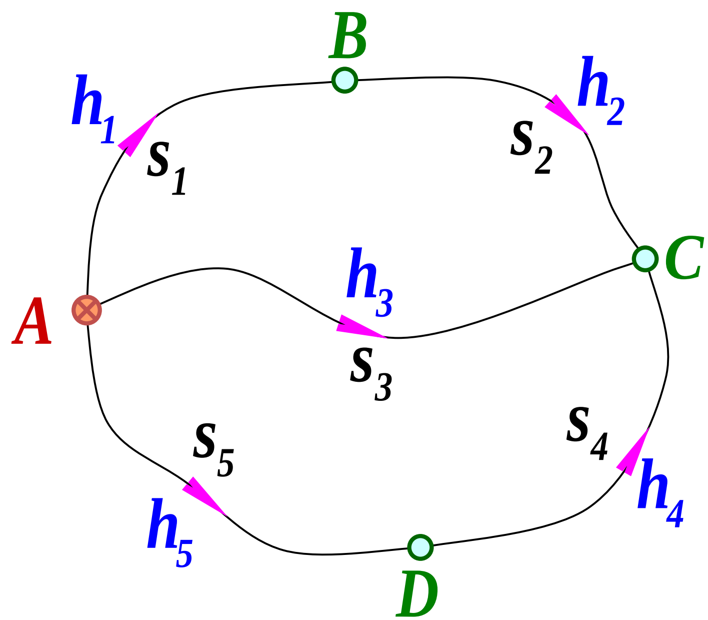
$$\hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{X}_1\\ \hat{X}_2\\ \hat{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{H}_B\\ \hat{H}_C\\ \hat{H}_D\end{pmatrix}$$

$$X^0=\begin{pmatrix}X_1^0\\ X_2^0\\ X_3^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}H_A+h_1\\ H_A+h_3\\ H_A+h_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}243.318\\ 247.123\\ 239.753\end{pmatrix}$$

间接平差原理

2、列平差值方程：

$$\left.\begin{aligned}\hat{h}_1 &= \hat{X}_1 - H_A\\ \hat{h}_2 &= \hat{X}_2 - \hat{X}_1\\ \hat{h}_3 &= \hat{X}_2 - H_A\\ \hat{h}_4 &= \hat{X}_2 - \hat{X}_3\\ \hat{h}_5 &= \hat{X}_3 - H_A\end{aligned}\right\}$$



$$\begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3\\ h_4\\ h_5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1^0 + \hat{x}_1\\ X_2^0 + \hat{x}_2\\ X_3^0 + \hat{x}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -H_A\\ 0\\ -H_A\\ 0\\ -H_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1^0 - H_A\\ X_2^0 - X_1^0\\ X_2^0 - H_A\\ X_2^0 - X_3^0\\ X_3^0 - H_A\end{pmatrix}$$

3、误差方程：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1^0 - H_A \\ X_2^0 - X_1^0 \\ X_2^0 - H_A \\ X_2^0 - X_3^0 \\ X_3^0 - H_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{pmatrix}$$

4、计算误差方程常数项 *l*

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \hat{x}_1 - l_1 \\ v_2 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 - l_2 \\ v_3 &= \hat{x}_2 - l_3 \\ v_4 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - l_4 \\ v_5 &= \hat{x}_3 - l_5 \end{aligned}\right\}$$

$H_A = 237.483m$

$$\begin{pmatrix} X_1^0 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243.318 \\ 247.123 \\ 239.753 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= h_1 - (X_1^0 - H_A) = 0 \\ l_2 &= h_2 - (X_2^0 - X_1^0) = -23 \\ l_3 &= h_3 - (X_2^0 - H_A) = 0 \\ l_4 &= h_4 - (X_2^0 - X_3^0) = 14 \\ l_5 &= h_5 - (X_3^0 - H_A) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \hat{x}_1 + 0 \\ v_2 &= -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + 23 \\ v_3 &= \hat{x}_2 + 0 \\ v_4 &= \hat{x}_2 - \hat{x}_3 - 14 \\ v_5 &= \hat{x}_3 + 0 \end{aligned}\right\}$$

或

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -23 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5、列误差方程，确定观测值的权：

令$c=10$，则由定权公式 $p_i = \dfrac{C}{S_i} = \dfrac{10}{S_i}$ **，有**

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0 \end{bmatrix}$$

间接平差原理

5、组成法方程，求参数改正数

$$N_{BB}=B^TPB=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.9&&&&\\&3.7&&&\\&&2.5&&\\&&&3.3&\\&&&&4.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.6&-3.7&0\\-3.7&9.5&-3.3\\0&-3.3&7.3\end{pmatrix}$$

间接平差原理

$$W=B^TPl=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.9&&&&\\&3.7&&&\\&&2.5&&\\&&&3.3&\\&&&&4.0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-23\\0\\14\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}85.1\\-38.9\\-46.2\end{pmatrix}$$

法方程为：

$$\begin{pmatrix}6.6&-3.7&0\\-3.7&9.5&-3.3\\0&-3.3&7.3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}85.1\\-38.9\\-46.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

解出

$$\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\hat{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6.6&-3.7&0\\-3.7&9.5&-3.3\\0&-3.3&7.3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}85.1\\-38.9\\-46.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11.75\\-2.04\\-7.25\end{pmatrix}mm$$

6、求观测值改正数

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -23 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11.75 \\ -2.04 \\ -7.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -23 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -2 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix} mm$$

7、求观测值平差值和高程平差值。

$$\begin{pmatrix}\hat{h}_1\\ \hat{h}_2\\ \hat{h}_3\\ \hat{h}_4\\ \hat{h}_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1+v_1\\ h_2+v_2\\ h_3+v_3\\ h_4+v_4\\ h_5+v_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.835\\ 3.782\\ 9.640\\ 7.384\\ 2.270\end{pmatrix}_m+\begin{pmatrix}12\\ 9\\ -2\\ -9\\ -7\end{pmatrix}_{mm}=\begin{pmatrix}5.847\\ 3.791\\ 9.638\\ 7.375\\ 2.263\end{pmatrix}_m$$

$$\hat{H}=\begin{pmatrix}\hat{H}_B\\ \hat{H}_C\\ \hat{H}_D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{X}_1\\ \hat{X}_2\\ \hat{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1^0+\hat{x}_1\\ X_2^0+\hat{x}_2\\ X_3^0+\hat{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}243.330\\ 247.121\\ 239.746\end{pmatrix}_m$$

6.2 水准路线平差程序设计

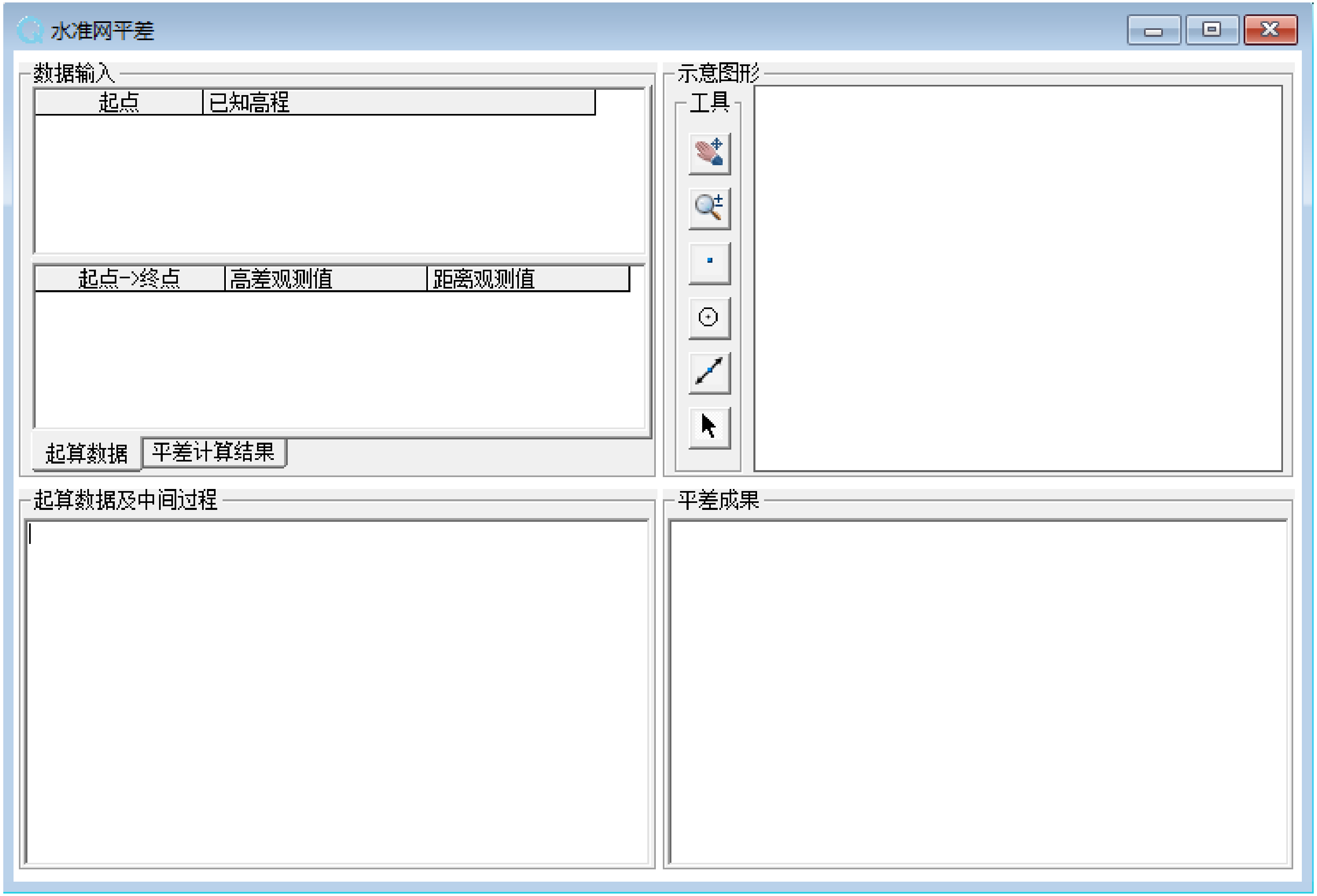
水准路线平差程序界面设计

水准网平差算法实现

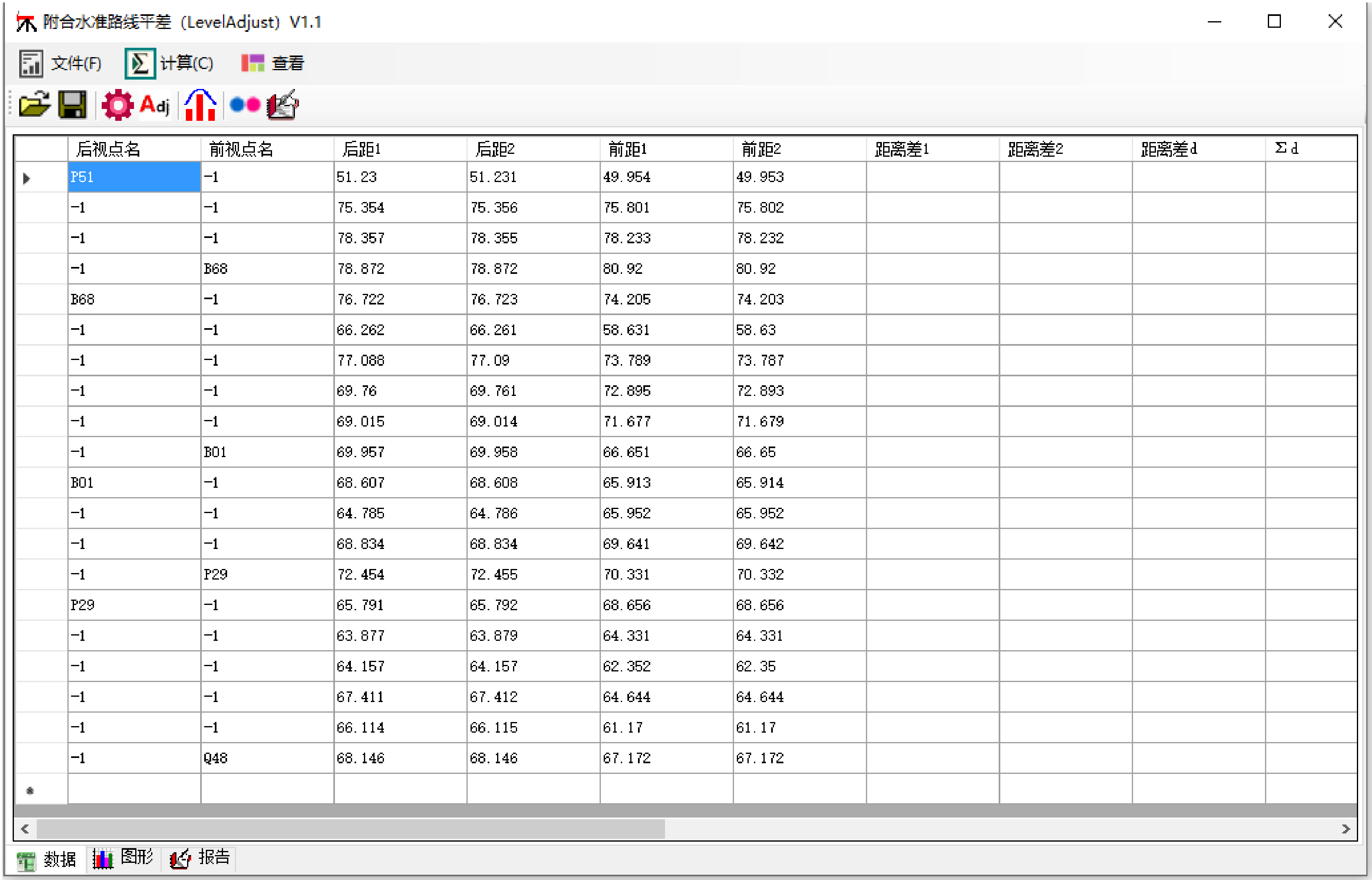
数据文件读取和计算报告输出

水准路线平差程序代码实现

水准路线平差程序界面设计



水准路线平差程序界面设计



后视点名	前视点名	后距1	后距2	前距1	前距2	距离差1	距离差2	距离差d	Σd
P51	-1	51.23	51.231	49.954	49.953				
-1	-1	75.354	75.356	75.801	75.802				
-1	-1	78.357	78.355	78.233	78.232				
-1	B68	78.872	78.872	80.92	80.92				
B68	-1	76.722	76.723	74.205	74.203				
-1	-1	66.262	66.261	58.631	58.63				
-1	-1	77.088	77.09	73.789	73.787				
-1	-1	69.76	69.761	72.895	72.893				
-1	-1	69.015	69.014	71.677	71.679				
-1	B01	69.957	69.958	66.651	66.65				
B01	-1	68.607	68.608	65.913	65.914				
-1	-1	64.785	64.786	65.952	65.952				
-1	-1	68.834	68.834	69.641	69.642				
-1	P29	72.454	72.455	70.331	70.332				
P29	-1	65.791	65.792	68.656	68.656				
-1	-1	63.877	63.879	64.331	64.331				
-1	-1	64.157	64.157	62.352	62.35				
-1	-1	67.411	67.412	64.644	64.644				
-1	-1	66.114	66.115	61.17	61.17				
-1	Q48	68.146	68.146	67.172	67.172				

水准网平差算法实现

算法实现

1. **水准测量的基本原理**

水准测量是使用水准仪和水准尺，根据水平视线测定两点之间的高差，从而由已知点推求未知点的高程。如图 1 所示，已知 A 点的高程为 H_A，A 点与 B 点的高差测量值是 h_{AB}，于是 B 点的高程 H_B 为：

$$H_B = H_A + h_{AB} \tag{1}$$

其中 A 点称为后视点，a 为后视读数，B 为前视点，b 为前视读数。

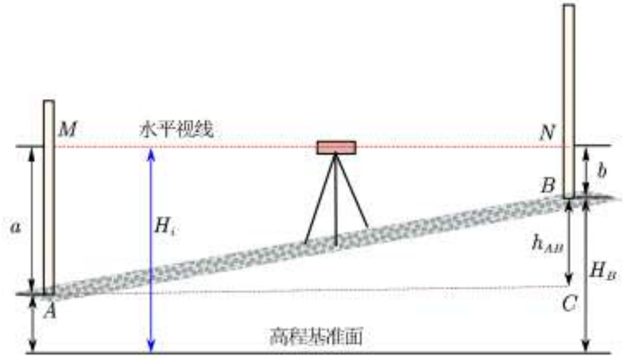


图 1 水准测量原理示意图

当两点之间的距离较远或者高差较大时，仅仅安装一次一起不能测量它们的高差，这时需要加设若干个临时的立尺点，作为传递高程的过渡点，即转点，基本测量方法为：（1）将水准尺立于已知高程的水准点上作为后视，安置水准仪和前视点。圆水准气泡粗平，瞄准后视尺，精平，读数。旋转望远镜瞄准前视尺，精平读数。记录、计算高差。(2) 后尺和测站向前移动，前尺不动并转为第二测站的后尺，原后尺变为前尺，同第一站的方法一样继续向前观测。

水准网平差算法实现

2. 数据记录与测站检查

2.1 水准测量数据记录

对于利用数字水准仪测量的数据，可以采用表 3 所示记录手簿进行检核，表中（1）至（4）是后视-前视读数，分别为后距、后视中丝、前距、前距中丝读数，（5）至（8）是前视-后视读数，分别为前距、前距中丝、后距、后视中丝读数。

表 1 水准测量的观测记录与数据检查手簿

测站编号	后视点名	后距 1	后距 2		后视中丝 1	后视中丝 2	后视中丝差	
	前视点名	前距 1	前距 2	距离差 d	前视中丝 1	前视中丝 2	前视中丝差	
	后-前	距离差 1	距离差 2	Σd	高差 1	高差 2	中丝差	高差
		(1)	(7)		(2)	(8)	(10)	
		(3)	(5)	(14)	(4)	(6)	(9)	
		(12)	(13)	(15)	(16)	(17)	(11)	(18)
1	P24	106.4965	106.4982		0.8187	0.8175	0.0012	
	转点 1	103.7130	103.7138	2.7840	1.0776	1.0759	0.0017	
	后-前	2.7835	2.7844	2.7840	-0.2589	-0.2584	-0.0005	-0.2587

说明：采用数字水准仪测量时，无需进行上丝和下丝读数，下表的设计省略了相关部分，与传统的三（四）等水准测量观测手簿有所不同。

水准网平差算法实现

2.2 测站数据计算

对每一站的测量结果需要进行检验，只有当检验通过之后，才能进行下一站的测量。在表 3 中第(9)至(18)是计算数据。

表中(9)至(11)是高差部分，其中(9)是前视标尺的黑红面读数(或两次读数)之差，(10)后视标尺的黑红面读数(或两次读数)之差，(11)是黑红面所测的高差，计算方法为：

(9)=(4)-(6)

(10)=(2)-(8)

(11)=(10)-(9)

表中(9)至(11)是视距部分，其中(12)是后视距离之差，(13)是前视距离之差，(14)是前后视距差，(15)为前后视距累计差，计算公式为：

(12)=(1)-(3)

(13)=(7)-(5)

(14)=[(12)+(13)]/2

(15)=本站的(14)+前站的(15)

表(16)为黑面所得到的高差，(17)是红面所得到的高差，(18)是本站高差，计算公式为：

(16)=(2)-(4)

(17)=(8)-(6)

(18)=[(16)+(17)]/2

说明：(1)在计算报告中输出如表 1 所示的水准测量记录与水准检查成果；(2)在上述内容在表格中显示。

水准网平差算法实现

2.3 测站超限检查

如果测站上有关观测限差超限，在本站检查发现后可立即重测。若迁站后才检查发现，则应该从水准点或间歇点起，重新观测。三、四等水准测量作业限差如表 2 所示。

表 2 三、四水准测量作业限差

等级	三等	四等
仪器类型	S3	S3
标准视线长度（m）	65	80
后前视距差（m）	3.0	5.0
后前视距差累计（m）	6.0	10.0
黑红面读数差（mm）	2.0	3.0
黑红面所测高差之差（mm）	3.0	5.0
监测间歇点高程之差（mm）	3.0	5.0

说明：对每站进行限差统计并输出，与表 2 中四等作业限差进行比较，在计算报告中给是否超限的说明。

水准网平差算法实现

3. 附合水准路线的近似平差计算公式

3.1 水准路线闭合高差计算

附合水准路线是水准测量中的常用方法，如图 2 所示。图中 A、B 高程分别为 H_A、H_B，测量得到高差依次为 h_1，…，h_n，相应的距离为 L_1，…，L_n。

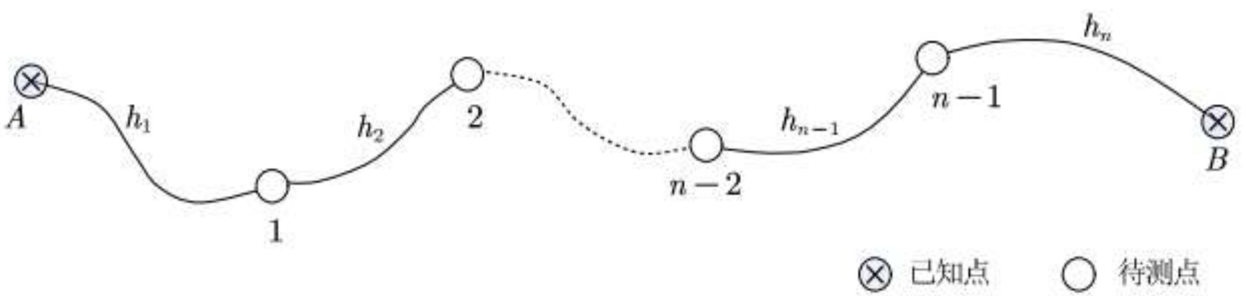


图 2 附合水准路线示意图

计算水准路线的高程闭合差 f_h，即：

$$f_h = \sum_{i=1}^{n} h_i - (H_B - H_A) \tag{2}$$

说明：在计算报告中输出高程闭合差，小数点后保留 3 位数值。

水准网平差算法实现

3.2 高差改正数计算

计算各段高差改正数 v_i

$$v_i = -\frac{f_h}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \cdot L_i \tag{3}$$

计算各测段观测高差的平差值 $\overline{h_i}$ 和待定点高程平差值 H_i，即：

$$\begin{cases} \overline{h_i} = & h_i + v_i \\ H_i = & H_A + \overline{h_1} + \cdots \overline{h_i} \end{cases} \tag{4}$$

说明：(1) 在计算报告中输出各测段观测高差改正数 v_i 和距离 L_i，小数点后保留 3 位数值；(2) 在计算报告中输出待定点的高差平差值 H_i，小数点后保留 3 位数值。

水准网平差算法实现

4.1 采用伴随矩阵法求逆

A 的逆矩阵计算公式：

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 的矩阵，其定义如下所示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$，其中$M_{ij}$为余子式，计算公式

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} a_{1,i} \det(A_{1,i}), 2 \le n \\ a_{1,1}, n = 1 \end{cases}$$

说明：对数据文件中的 A 矩阵，进行求逆，将计算结果在计算报告中输出，小数点后保留 3 位数值。

水准网平差算法实现

5.1 建立误差方程

针对本题的水准路线，建立误差方程

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix}}_{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_1 + \hat{x}_2 \\ \vdots \\ -\hat{x}_{n-2} + \hat{x}_{n-1} \\ -\hat{x}_{n-1} \end{pmatrix}}_{BX} - \underbrace{\begin{pmatrix} h_1 + H_A - X_1^0 \\ h_2 + X_1^0 - X_2^0 \\ \vdots \\ h_{n-1} + X_{n-2}^0 - X_{n-1}^0 \\ X_{n-1}^0 - H_B + h_n \end{pmatrix}}_{L} \tag{9}$$

其中 X 矩阵为 $\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-2} \\ \hat{x}_{n-1} \end{pmatrix}$

其中 v_i 为高差 h_i 的改正数，$\hat{x}_i$ 为第 i 个点高程平差值，X_i^0 为第 i 个点的高程近似值。

说明：在计算报告中输出 L 矩阵，小数点后保留 6 位数值。

水准网平差算法实现

5.2 间接平差

取 10km 的观测高差为单位权观测，即按 $P_i = \frac{C}{S_i} = \frac{10}{S_i}$ 定权，得到观测值的权阵

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_n \end{pmatrix} \tag{10}$$

组成法方程

$$\underbrace{B^T PB}_{N}\,\hat{x} = B^T PL \tag{11}$$

得到最小二乘解

$$\hat{x} = (B^T PB)^{-1} B^T PL = N^{-1} B^T PL \tag{12}$$

说明：在计算报告中输出 $\hat{x}$、N^{-1} 这 3 个矩阵，小数点后保留 6 位数值。

5.3 计算改正后的高程

根据 5.2 的计算结果计算改正后的高程

说明：在计算报告中输出改正后的高程，小数点后保留 3 位数值。

数据文件读取和计算报告输出

■ 数据文件读取和计算报告输出

数据格式说明如表 4 所示。

表 4 数据格式说明

点名，已知高程
点名，已知高程

起点，终点，后视距离，后视中丝读数，前视距离，前视中丝读数，前视距离，前视中丝读数，后视距离，后视中丝读数（当点名为-1 时表示转点）

矩阵 A（用于矩阵求逆和转置的测试）
矩阵 B（用于矩阵乘积测试）

表 3 数据内容

```
P96,248.197
P47,246.980

P96,-1,59.1975,0.6581,59.1216,0.8432,59.1195,0.8416,59.1958,0.6564
-1,-1,59.2505,0.6596,59.1746,0.8251,59.1726,0.8235,59.2488,0.6580
-1,Q08,59.3032,0.6611,59.2273,0.8072,59.2253,0.8057,59.3016,0.6595
Q08,-1,59.3554,0.6625,59.2795,0.7899,59.2776,0.7885,59.3539,0.6610
-1,-1,59.4070,0.6639,59.3311,0.7734,59.3293,0.7720,59.4055,0.6624
-1,-1,59.4579,0.6651,59.3820,0.7577,59.3802,0.7564,59.4565,0.6638
-1,B42,59.5079,0.6664,59.4320,0.7430,59.4303,0.7418,59.5066,0.6651
B42,-1,59.5570,0.6675,59.4811,0.7295,59.4794,0.7284,59.5557,0.6662
-1,-1,59.6050,0.6685,59.5291,0.7174,59.5274,0.7163,59.6037,0.6673
-1,-1,59.6517,0.6694,59.5758,0.7067,59.5743,0.7056,59.6506,0.6682
-1,A44,59.6973,0.6701,59.6214,0.6975,59.6198,0.6965,59.6961,0.6690
A44,-1,59.7414,0.6707,59.6655,0.6900,59.6640,0.6890,59.7403,0.6697
-1,-1,59.7841,0.6712,59.7082,0.6842,59.7068,0.6832,59.7831,0.6702
-1,-1,59.8254,0.6715,59.7495,0.6801,59.7481,0.6792,59.8243,0.6705
-1,B78,59.8652,0.6717,59.7893,0.6779,59.7879,0.6770,59.8641,0.6707
B78,-1,59.9035,0.6718,59.8276,0.6775,59.8261,0.6766,59.9024,0.6707
-1,-1,59.9402,0.6716,59.8643,0.6790,59.8629,0.6780,59.9392,0.6706
-1,-1,59.9755,0.6714,59.8996,0.6823,59.8981,0.6813,59.9744,0.6703
-1,P47,60.0093,0.6709,59.9334,0.6873,59.9319,0.6863,60.0082,0.6699

1,3
3,4

1,3,2
2,4,5
```

样例数据参考答案

2.2 测站数据计算、2.3 测站超限检查

后视点名	后距1	后距2		后视中丝1	后视中丝2	后视中丝差	d是否超限
前视点名	前距1	前距2	距离差d	前视中丝1	前视中丝2	前视中丝差	Σd是否超限
后-前	距离差1	距离差2	Σd	高差1	高差2	中丝差	高差
A87	49.9360	49.9360		1.4750	1.4760	-0.0010	否
-1	48.6830	48.6840	1.2525	1.2700	1.2720	-0.0020	否
	1.2530	1.2520	1.2525	0.2050	0.2040	0.0010	0.2045
-1	60.0560	60.0550		0.6340	0.6350	-0.0010	否
-1	60.0470	60.0480	0.0080	0.8670	0.8640	0.0030	否
	0.0090	0.0070	1.2605	-0.2330	-0.2290	-0.0040	-0.2310
-1	77.0480	77.0490		1.3760	1.3770	-0.0010	否
-1	77.1230	77.1220	-0.0740	1.2300	1.2300	0.0000	否
	-0.0750	-0.0730	1.1865	0.1460	0.1470	-0.0010	0.1465
-1	57.6450	57.6450		0.8680	0.8690	-0.0010	否
P84	59.7970	59.7950	-2.1510	0.8690	0.8680	0.0010	否
	-2.1520	-2.1500	-0.9645	-0.0010	0.0010	-0.0020	0.0000
P84	74.7710	74.7690		1.4430	1.4420	0.0010	否
-1	74.4790	74.4810	0.2900	1.3960	1.3950	0.0010	否
	0.2920	0.2880	0.2900	0.0470	0.0470	0.0000	0.0470
-1	80.5560	80.5570		1.3540	1.3540	0.0000	否
-1	79.0210	79.0210	1.5355	1.0190	1.0210	-0.0020	否
	1.5350	1.5360	1.8255	0.3350	0.3330	0.0020	0.3340
-1	58.2090	58.2080		0.7960	0.7930	0.0030	否
-1	60.9390	60.9390	-2.7305	1.0160	1.0160	0.0000	否
	-2.7300	-2.7310	-0.9050	-0.2200	-0.2230	0.0030	-0.2215
-1	66.7440	66.7460		0.6750	0.6760	-0.0010	否
-1	69.9130	69.9110	-3.1670	0.7820	0.7800	0.0020	否
	-3.1690	-3.1650	-4.0720	-0.1070	-0.1040	-0.0030	-0.1055
-1	60.2300	60.2310		1.4400	1.4390	0.0010	否
-1	61.5970	61.5950	-1.3655	1.3530	1.3530	0.0000	否
	-1.3670	-1.3640	-5.4375	0.0870	0.0860	0.0010	0.0865
-1	74.9560	74.9570		1.3110	1.3130	-0.0020	否
Q93	75.7920	75.7900	-0.8345	1.2080	1.2100	-0.0020	否
	-0.8360	-0.8330	-6.2720	0.1030	0.1030	0.0000	0.1030
Q93	70.7980	70.7990		1.3620	1.3620	0.0000	是
-1	63.8100	63.8100	6.9885	1.3520	1.3500	0.0020	否
	6.9880	6.9890	6.9885	0.0100	0.0120	-0.0020	0.0110
-1	66.5000	66.5010		1.3580	1.3580	0.0000	否
A17	68.9020	68.9030	-2.4020	1.2960	1.2950	0.0010	否
	-2.4020	-2.4020	4.5865	0.0620	0.0630	-0.0010	0.0625
A17	65.6660	65.6670		1.4330	1.4340	-0.0010	否
-1	67.8400	67.8410	-2.1740	0.9760	0.9770	-0.0010	否
	-2.1740	-2.1740	-2.1740	0.4570	0.4570	0.0000	0.4570
-1	72.3420	72.3440		1.4380	1.4370	0.0010	否
Q89	73.6410	73.6390	-1.2970	1.2690	1.2690	0.0000	否
	-1.2990	-1.2950	-3.4710	0.1690	0.1680	0.0010	0.1685
Q89	72.7540	72.7560		1.4480	1.4490	-0.0010	否
-1	69.4430	69.4430	3.3120	1.0960	1.0960	0.0000	否
	3.3110	3.3130	3.3120	0.3520	0.3530	-0.0010	0.3525
-1	62.0560	62.0570		1.4140	1.4140	0.0000	否
-1	60.2870	60.2850	1.7705	1.2740	1.2750	-0.0010	否
	1.7690	1.7720	5.0825	0.1400	0.1390	0.0010	0.1395
-1	71.2890	71.2900		1.3910	1.3920	-0.0010	否
-1	71.4290	71.4300	-0.1400	0.8420	0.8430	-0.0010	否
	-0.1400	-0.1400	4.9425	0.5490	0.5490	0.0000	0.5490
-1	71.0530	71.0550		1.5000	1.5010	-0.0010	否

P18	69.1140	69.1140	1.9400	1.0490	1.0510	-0.0020	否
	1.9390	1.9410	6.8825	0.4510	0.4500	0.0010	0.4505
P18	70.1060	70.1060		1.3770	1.3780	-0.0010	否
-1	65.7090	65.7100	4.3965	0.8470	0.8490	-0.0020	否
	4.3970	4.3960	4.3965	0.5300	0.5290	0.0010	0.5295
-1	67.1830	67.1840		0.7540	0.7550	-0.0010	否
-1	63.8020	63.8040	3.3805	0.8500	0.8510	-0.0010	否
	3.3810	3.3800	7.7770	-0.0960	-0.0960	0.0000	-0.0960
-1	65.4830	65.4840		1.3520	1.3510	0.0010	否
-1	61.5940	61.5930	3.8900	1.3450	1.3440	0.0010	是
	3.8890	3.8910	11.6670	0.0070	0.0070	0.0000	0.0070
-1	64.1000	64.1020		1.3790	1.3790	0.0000	否
B53	60.1330	60.1340	3.9675	1.2620	1.2630	-0.0010	是
	3.9670	3.9680	15.6345	0.1170	0.1160	0.0010	0.1165

3.1 水准路线闭合高差计算

高差闭合差为：15.000mm

3.2.1 高差改正数计算

测段名	距离(m)	高差(m)	高差改正数(mm)	改正后高差(m)
A87-P84	490.335	0.120	-2.500	0.118
P84-Q93	837.206	0.244	-4.268	0.239
Q93-A17	270.012	0.074	-1.376	0.072
A17-Q89	279.490	0.626	-1.425	0.624
Q89-P18	547.428	1.492	-2.791	1.489
P18-B53	518.114	0.557	-2.641	0.554

3.2.2 高程计算

点名	高程(m)
P84	253.701
Q93	253.940
A17	254.012
Q89	254.636
P18	256.125
B53	256.679

4.1 采用伴随矩阵法求逆

0.484	-0.906	-0.565	1.170
-0.395	0.775	0.768	-1.245
-0.171	0.261	0.105	-0.148
-0.131	0.664	0.356	-0.933

4.2 矩阵相乘

133.566	92.721	83.777
118.504	81.827	96.437
139.976	106.389	64.498
109.939	84.102	71.717

4.3 矩阵转置

7.197	4.779	6.557	4.740
2.088	0.434	4.954	1.862
4.866	8.983	6.609	8.129
5.470	3.993	0.567	1.102

5.1 建立误差方程，获得L矩阵

0.002500

0.004268

0.001376

数据文件读取和计算报告输出

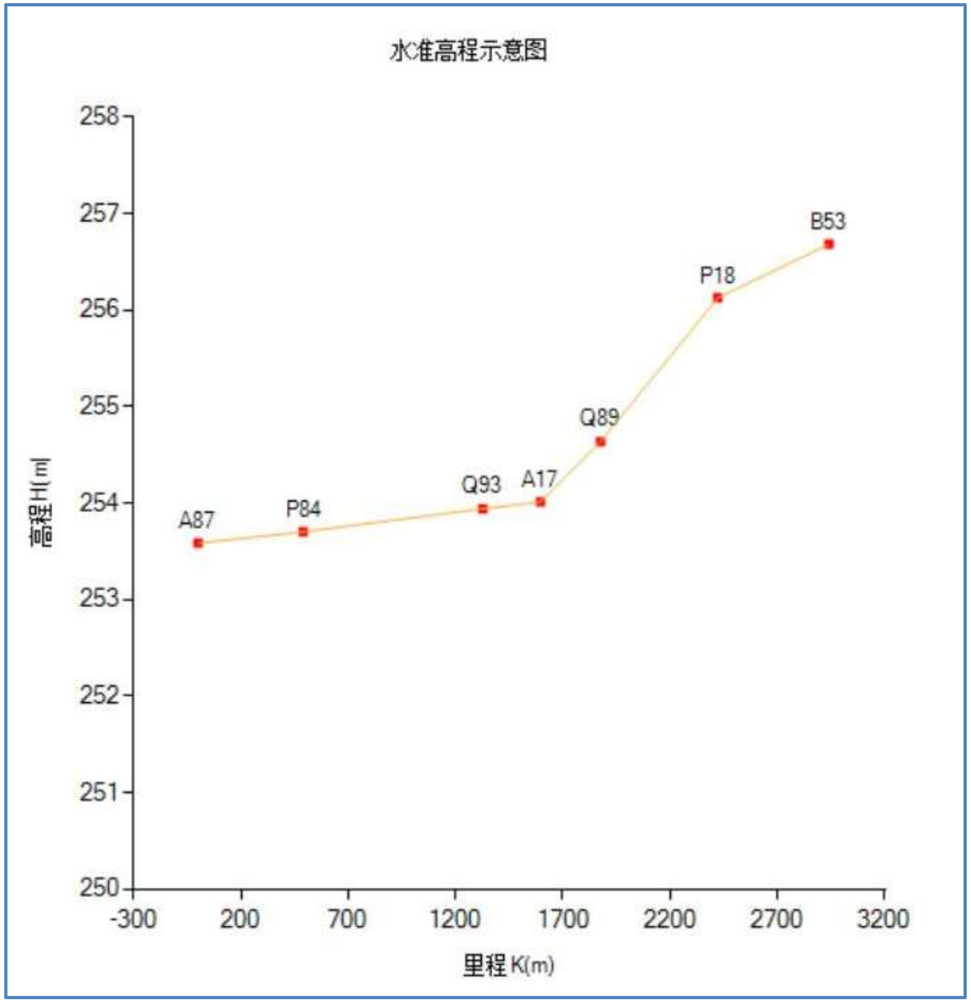
0.001425
0.002791
0.002641

5.2 间接平差
X矩阵为：
0.000000
0.000000
0.000000
0.000000
0.000000
N的逆矩阵为：

40.862808	26.912106	22.412795	17.755540	8.633535
26.912106	72.862323	60.680808	48.071671	23.374588
22.412795	60.680808	73.022816	57.849079	28.128799
17.755540	48.071671	57.849079	67.969713	33.049902
8.633535	23.374588	28.128799	33.049902	42.688698

5.3 计算改正后的高程
平差改正后的高程如下：

点名	高程(m)
P84	253.701
Q93	253.940
A17	254.012
Q89	254.636
P18	256.125



水准路线平差程序代码实现

■ 预处理

```
public static void PreProcess(ref DataCenter dataCenter)
        {
            for (int i = 0; i < dataCenter.Stations.Count; i++)
            {
                double[] a = new double[18];
                for (int j = 0; j < 8; j++)
                { a[j] = dataCenter.Stations[i].list[j];}
                a[8] = a[3] - a[5];
                a[9] = a[1] - a[7];
                a[10] = a[9] - a[8];

                a[11] = a[0] - a[2];
                a[12] = a[6] - a[4];
                a[13] = (a[11] + a[12]) / 2;
                if (dataCenter.Stations[i].Point1.Name!="-1")
                { a[14] = a[13];}
                else
                { a[14] = a[13] + dataCenter.Stations[i - 1].list[14];}
                a[15] = a[1] - a[3];
                a[16] = a[7] - a[5];
                a[17] = (a[15] + a[16]) / 2;
                if(dataCenter.Stations[i].Point1.Name != "-1")
                { dataCenter.Stations[i].deltaH = a[17];}
                else
                { dataCenter.Stations[i].deltaH = dataCenter.Stations[i-1].deltaH + a[17];}
                for (int j = 8; j < 18; j++)
                {dataCenter.Stations[i].list.Add(a[j]);}
            }
        }
```

```
public static void ApproximateProcess(ref DataCenter dataCenter)
        {
            dataCenter.fh = 0;
            double totalL = 0;
            dataCenter.Stations[0].Point1.H = dataCenter.KnownPoint1.H;
            for (int i = 0; i < dataCenter.Stations.Count; i++)
            {
                dataCenter.fh += dataCenter.Stations[i].list[17];
                totalL += dataCenter.Stations[i].list[14];
            }
            double totalH = dataCenter.KnownPoint1.H;
            dataCenter.fh = dataCenter.fh - (dataCenter.KnownPoint2.H - dataCenter.KnownPoint1.H);
            //Console.WriteLine(dataCenter.fh);
            for(int i = 0; i < dataCenter.Stations.Count; i++)
            {
                dataCenter.Stations[i].v = -dataCenter.fh * dataCenter.Stations[i].list[14] / totalL;
                totalH += dataCenter.Stations[i].list[17]+dataCenter.Stations[i].v;
                dataCenter.Stations[i].Point2.H = dataCenter.Stations[i].v+ totalH;
                //Console.WriteLine(dataCenter.Stations[i].v);
                if(i< dataCenter.Stations.Count - 1)
                {
                    dataCenter.Stations[i+1].Point1.H = dataCenter.Stations[i].Point2.H;
                }
            }
        }
```

```
public static void FinalProcess(ref DataCenter dataCenter)
        {
            for (int i = 0; i < dataCenter.Stations.Count; i++)
            {
                if (dataCenter.Stations[i].Point1.Name != "-1")
                {
                    Station station1 = new Station();
                    station1.Point1 = dataCenter.Stations[i].Point1;
                    dataCenter.NewStations.Add(station1);
                }
                if (dataCenter.Stations[i].Point2.Name != "-1")
                {
                    dataCenter.NewStations[dataCenter.NewStations.Count - 1].Point2 = dataCenter.Stations[i].Point2;
                    dataCenter.NewStations[dataCenter.NewStations.Count - 1].D = dataCenter.Stations[i].list[14];
                    dataCenter.NewStations[dataCenter.NewStations.Count - 1].deltaH = dataCenter.Stations[i].deltaH;
                }
            }
            Matrix B = new Matrix();
            B.N = dataCenter.NewStations.Count - 1;
            B.M = dataCenter.NewStations.Count;
            for(int i = 0; i < B.M; i++)
            {
                for(int j = 0; j < B.N; j++)
                {
                    if (i == j)
                    { B.array.Add(1); }
                    else if (j + 1 == i){B.array.Add(-1);} else {B.array.Add(0);}
                }
            }
            Matrix L = new Matrix();
            L.M = dataCenter.NewStations.Count;
            L.N = 1;
```

```
for (int i=0;i< dataCenter.NewStations.Count; i++)
            {
                double l = -(dataCenter.NewStations[i].deltaH + dataCenter.NewStations[i].Point1.H - 
dataCenter.NewStations[i].Point2.H);
                L.array.Add(l);
            }
            dataCenter.L = L;
            Matrix P = new Matrix();
            P.M = dataCenter.NewStations.Count;
            P.N = dataCenter.NewStations.Count;
            for(int i = 0; i < P.M; i++)
            {
                for(int j = 0; j < P.N; j++)
                {
                    if (i == j) {P.array.Add(10 / dataCenter.NewStations[i].D);} else {P.array.Add(0);}
                }
            }
            Matrix BT = Matrix.getT(B);
            Matrix BTPB = Matrix.multiply(Matrix.multiply(BT, P), B);
            Matrix invBTPB = Matrix.getInv(BTPB);
            dataCenter.invBTPB = invBTPB;
            Matrix BTPL = Matrix.multiply(Matrix.multiply(BT, P), L);
            Matrix x = Matrix.multiply(invBTPB, BTPL);
            dataCenter.x = x;
            for(int i = 0; i < dataCenter.NewStations.Count-1; i++)
            {
                dataCenter.NewStations[i].Point2.H = dataCenter.NewStations[i].Point2.H;
                dataCenter.NewStations[i].Point2.realH = dataCenter.NewStations[i].Point2.H + x.array[i];
                dataCenter.Points.Add(dataCenter.NewStations[i].Point2);
            }
        }
```