

矩阵基本运算

参考：《测绘程序设计》上册，武汉大学出版社

实现矩阵基本运算（包括加、减、乘、除，求行列式、求逆及转置），并根据提供的示例矩阵，验证程序结果的正确性。

一、两个矩阵的加法运算

1. 检查两个矩阵行数和列数是否相同

根据两个矩阵的行数和列数进行判断，若相同，则进行加法运算；若不同，则给出相应错误信息。

2. 两个矩阵加法运算

循环遍历矩阵中所有元素，将左矩阵中的每个元素与右矩阵中的对应位置的元素进行相加。两个矩阵相加，即它们相同位置的元素相加！

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\text{其中矩阵 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 矩阵 } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}。$$

二、两个矩阵的减法运算

1. 检查两个矩阵行数和列数是否相同

根据两个矩阵的行数和列数进行判断，若相同，则进行减法运算；若不同，则给出相应错误信息。

2. 两个矩阵减法运算

循环遍历矩阵中所有元素，将左矩阵中的每个元素与右矩阵中的对应位置的元素进行相减。两个矩阵相减，即它们相同位置的元素相减。

$$A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

三、矩阵的乘法运算

1. 两个矩阵的乘法运算

(1) 检查两个矩阵行数和列数是否满足运算规则

根据左矩阵的行数和右矩阵的列数进行判断，若相同，则进行乘法运算；若不同，则给出相应错误信息。

(2) 进行乘法计算

遍历 A 矩阵中的每行，依次将第 i 行中的每个元素与 B 矩阵中第 s 列中的每个元素对应相乘之后相加，并将这个和放置在结果矩阵中第 i 行 j 列。(i=1、2、3…m, m 为 A 矩阵中总行数；j=1、2、3…s, s 为 B 矩阵中的总列数)

$$\text{设矩阵 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 矩阵 } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } A*B=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{ks} \end{pmatrix}$$

2. 矩阵与数的乘法运算

将矩阵中的每个元素乘以这个数之后放置在结果矩阵的相应位置。

$$\text{设矩阵 } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{则 } \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意:矩阵与数的运算包括矩阵左乘一个数及矩阵右乘一个数。

四、求方阵的行列式

1. 检查矩阵是否为方阵

判断是否为方阵，若是，则进行求行列式运算；若不是，则给出相应错误信息。

2. 方阵的求行列式运算

如果方阵的行数等于 2，则方阵的行列式直接用二阶矩阵行列式公式求解；如果方阵的行数大于 2，依次将第 m 行 n 列的元素的余子式（将方阵去掉此元素所在的行上所有元素和列上所有元素，所构成的矩阵）赋值给一个新的变量，将此变量的行列式乘以 -1 的 $m+n$ 次方，并赋值给另一个变量，继续调用本函数求此变量的行列式，依次递归下去，直到方阵降为 2 阶。（ $m=1、2、3\cdots\text{row}$ ， row 为左矩阵中总行数； $n=1、2、3\cdots\text{column}$ ， column 为右矩阵中的总列数）

五、方阵的逆运算

1. 检查矩阵是否为方阵

判断是否为方阵，是则进行求逆运算；若不是，则给出相应错误信息。

2. 求伴随矩阵

依次将第 m 行 n 列的元素的余子式（将方阵去掉此元素所在的行上所有元素和列上所有元素，所构成的矩阵）赋值给一个新的变量，将此变量的行列式乘以 -1 的 $m+n$ 次方放置在结果矩阵的第 m 行 n 列上。（ $m=1、2、3\cdots\text{row}$ ， row 为左矩阵中总行数； $n=1、2、3\cdots\text{column}$ ， column 为右矩阵中的总列数）

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 则 } a_{11} \text{ 的伴随矩阵为 } A_{11}^* = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. 求逆矩阵

如果方阵的行列式等于 0，则不存在逆矩阵；

如果方阵的行列式不为 0，则将原矩阵的伴随矩阵的转置阵乘上原矩阵的逆矩阵。

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{则 } A^{-1} = \frac{1}{|A|} * A^*$$

六、矩阵的除法运算

1. 两个矩阵的除法运算

(1) 检查两个矩阵行数和列数是否满足运算规则

判断左矩阵的行数和右矩阵的列数进行判断，若相同，则进行除法运算；若不同，则给出相应错误信息。

(2) 两个矩阵的除法运算

将左矩阵右乘右矩阵的逆矩阵，其余同乘法运算。

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ 矩阵 } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

则 $A/B = A * B^{-1}$

2. 矩阵与数的除法运算

将矩阵中的每个元素除以这个数之后放置在结果矩阵的相应位置。

七、矩阵的转置运算

将原矩阵中的第 m 行 n 列的元素放置到结果矩阵的第 n 行 m 列中。

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{则 } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

八、参考结果

在“<https://github.com/ybli/bookcode/tree/master/Part1-ch01/>”目录下给出了参考源程序和可执行文件。用户界面如图 1 所示。

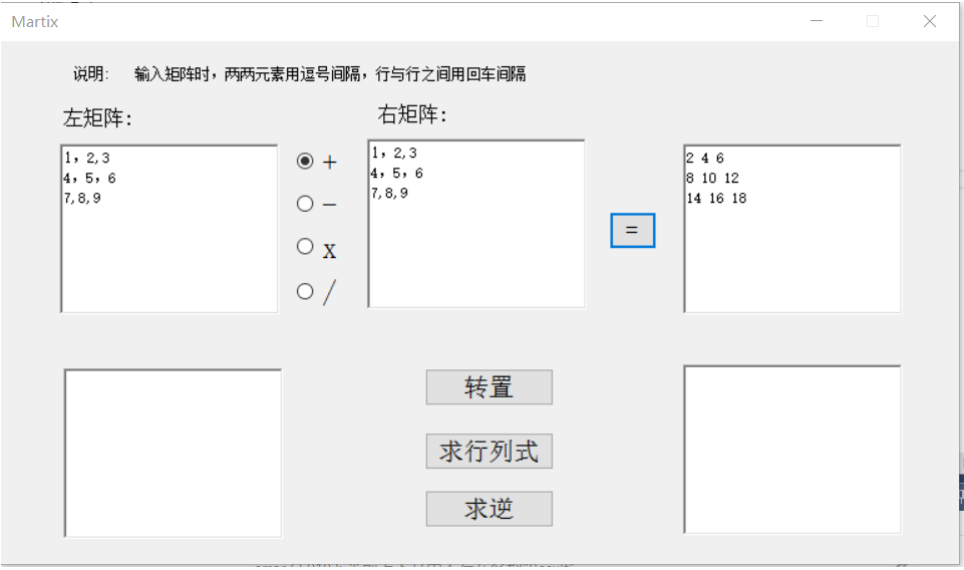


图 1 加法操作结果