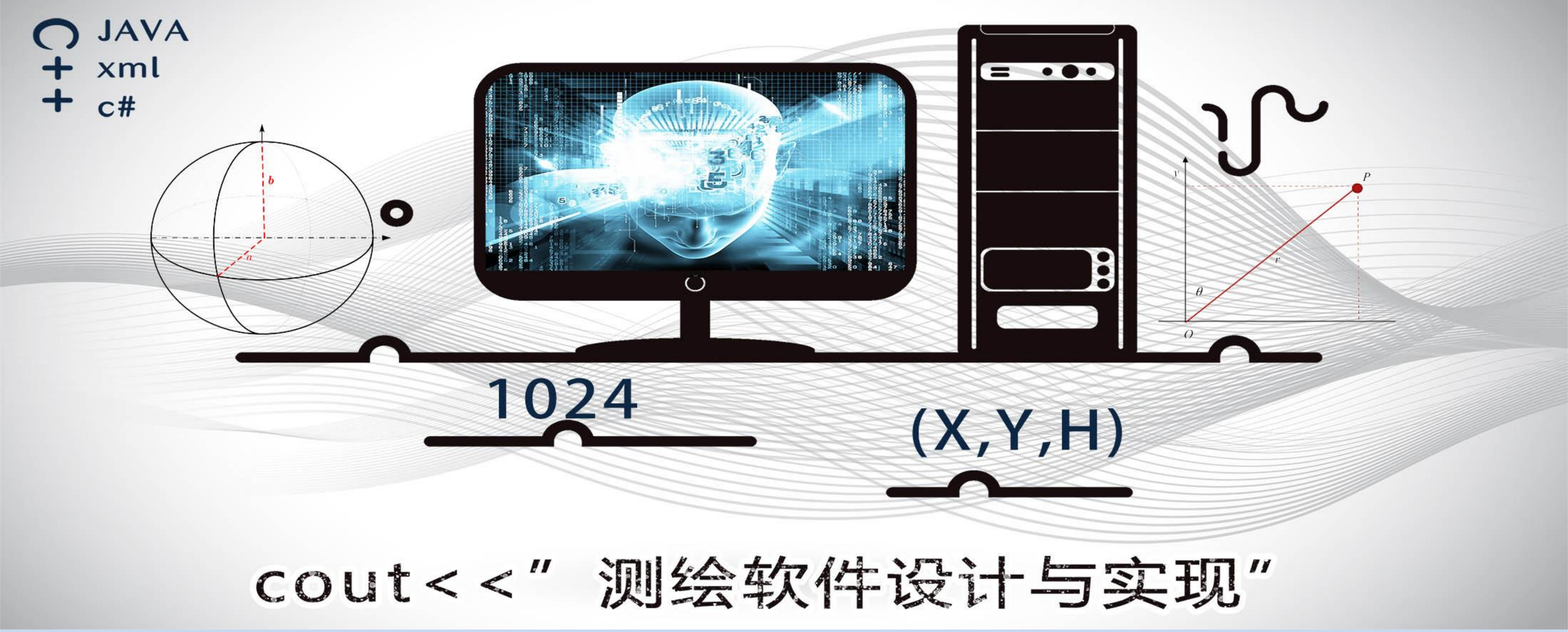


第4章 矩阵类的实现

朱晓峻

Email：zhuxiaojunahu@126.com

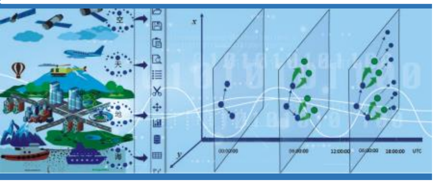
QQ：302838249

安徽大学 资源与环境工程学院

学习内容

Contents

测绘程序设计



- 测绘程序中的矩阵应用
- 矩阵类的描述
- 矩阵加、减、乘、转置
- 高斯- 约当法矩阵求逆

4.2 矩阵类的描述

```
class Matrix
  {
    //属性
    private:
          nColums;      //矩阵列数
          nRows;        //矩阵行数
          elements[ , ];   //记录矩阵每一元素
```

4.2 矩阵类的描述

```
//构造函数
public:
        Matrix() //基本构造函数
        Matrix(int nRows, int nCols) //指定行列构造函数
        Matrix(double[,] value) //指定值(二维数组)构造函数
        Matrix(int nRows, int nCols, double[] value) //指定值(一维数组))构造函数
        Matrix(int nSize) //方阵构造函数
        Matrix(int nSize, double[] value) //指定值(一维数组)的方阵构造函数
```

4.3 高斯-约当法矩阵求逆

4.3.1 高斯顺序消去法

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & -1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 5 & -1 & 11 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - \frac{4}{2}r_1,\, r_3 - \frac{1}{2}r_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -2.5 & 0.5 & -3.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - (\frac{-2.5}{3})r_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \quad 3x_2 - 3x_3 = -3 \\ \quad\quad -2x_3 = -6 \end{cases}$$

2.4 高斯-约当法矩阵求逆

2. 4. 1 高斯顺序消去法

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12x_2} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22x_2} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad \cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2x_2} + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$$
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
\vdots & & & \\
0 & a_{n2}^{(2)} & & a_{nn}^{(2)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}
\Rightarrow
\begin{bmatrix}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\
 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\
 & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_{nn}^{(n)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}
$$

2.4 高斯-约当法矩阵求逆

例题1

用高斯消去法解方程组

$$\begin{cases} 0.3\times 10^{-11}x_1 + x_2 = 0.7 \\ x_1 + x_2 = 0.9 \end{cases}$$

精确到10位真解 $x^* = (0.2000000000\,,\,0.7000000000)^T$

2.4 高斯-约当法矩阵求逆

解法1

消元 $(A,\vec{b})=\left[\begin{array}{cc:c} 0.3\times10^{-11} & 1 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.9 \end{array}\right]$

$$m_{21}=\frac{1}{0.3\times10^{-11}}=0.3333333333\times10^{12}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cc:c} 0.3\times10^{-11} & 1 & 0.7 \\ 0 & -0.3333333333\times10^{12} & -0.2333333333\times10^{12} \end{array}\right]$$

$$\boxed{\boxed{1}-1\times0.3333333333\times10^{12}}$$

舍去或着说被“吃”

$$\boxed{0.9}\quad\boxed{0.9-0.7\times0.3333333333\times10^{12}}$$

舍去或着说被“吃”

计算解 $\begin{cases} x_2=0.7000000000 \\ x_1=0.0000000000 \end{cases}$.

2.4 高斯-约当法矩阵求逆

显然, 计算解与真解相差太大, 原因是用很小的数 $a_{11}^{(1)} = 0.3\times10^{-11}$ 作除数，使得舍入误差太大，从而计算结果不可靠.

解法2　用行变换的高斯消去法.

$$\begin{cases} 0.3\times10^{-11}x_1 + x_2 = 0.7 \\ x_1 + \quad x_2 = 0.9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0.9 \\ 0.3\times10^{-11}x_1 + x_2 = 0.7 \end{cases}$$

消元

$$(A,\vec{b}) = \left[\begin{array}{cc:c} 0.3\times10^{-11} & 1 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.9 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0.9 \\ 0.3\times10^{-11} & 1 & 0.7 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.7 \end{array}\right]$$

计算解

$$\begin{cases} x_2 = 0.7000000000 \\ x_1 = 0.2000000000 \end{cases}.$$

$$\left(\boldsymbol{m_{21} = \frac{0.3\times10^{-11}}{1} = 0.3\times10^{-11}}\right)$$

该结果较好. 该例子说明，在采用高斯消去法解方程组时，应避免采用绝对值很小主元素 $a_{kk}^{(k)}$. 对一般系数矩阵，最好保持乘数 $|m_{ik}| \le 1$，因此在高斯消去法中引进选主元素技巧.

2.4.2 完全主元素消去法

设$A\vec{x} = \vec{b}$, (4.1) $A \in R^{n\times n}$ 为非奇异矩阵,$[A, \vec{b}]$增广阵.

一、 选主元消元法

第一步

(1)选主元 在A中选取绝对值最大的元素作为主元素，即确定

i_1, j_1, 使 $|a_{i_1, j_1}| = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}| \ne 0.$

(2)交换行列

当$j_1 \ne 1$时,交换$(A, \vec{b})$第1列与第j_1列元素.

注意调换x_1与x_{j_1} 两未知量，并作记录，且$A, \vec{b}$元素仍记为a_{ij}, b_i。

（3）消元计算 $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}} \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$,

$a_{i1} \leftarrow a_{i1} - m_{i1}a_{11} \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$, $\quad b_i \leftarrow b_i - m_{i1}b_1 \quad (i = 2, 3, \cdots, n)$

第k 步 重复进行，设已完成第1步～第k-1步的选主元，使

$[A, \vec{b}]$约化为 $[A, \vec{b}] \to [A^{(k)}, \vec{b}^{(k)}]$

$$[A,\vec{b}]\rightarrow[A^{(k)},\vec{b}^{(k)}] = \left[\begin{array}{ccccc:c} a_{11} & a_{12} & & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22} & & & & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{kk} \;\; \cdots & a_{kn} & b_k \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk} \;\; \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

方框为第k步选主元区域$k=1,2,\cdots,n-1.$

第k步的步骤

(1) 选主元　确定i_k, j_k,使 $\left|a_{i_k j_k}\right| = \max\limits_{\substack{k\le i\le n \\ k\le j\le n}}\left|a_{ij}\right| \neq 0;$

(2) 交换行列　当$i_k \neq k$时,交换$(A^{(k)},\vec{b}^{(k)})$第k行与第i_k行元素,

当$j_k \neq k$时,交换$(A^{(k)},\vec{b}^{(k)})$第k列与第j_k列元素;

（3）消元计算

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} (i = k+1,\cdots,n)$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} - m_{ik}a_{kj} (i, j = k+1,\cdots,n)$$

$$b_i \leftarrow b_i - m_{ik}b_k (i = k+1,\cdots,n)$$

二、 回代求解

经过上述过程，方程组约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

其中$y_1, y_2, \cdots, y_n$是未知数$x_1, x_2, \cdots, x_n$调换后的次序. 则

$$\begin{cases} y_n = b_n / a_{nn} \\ y_i = (b_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j) / a_{ii} \qquad (i = n-1, \cdots, 2, 1) \end{cases}$$

优点　　该方法数值稳定($|m_{i\ k}| \le 1$).

缺点

改进方法　列主元消去法，且此时$|m_{i\ k}| \le 1.$

2.4.4 列主元高斯—约当（Gauss –Jordan)消去法

假设G−J消去法已完成第1步～第*k*-1步，得到与原方程组等价的方程组 $A^{(k)}\vec{x}=\vec{b}^{(k)}$ ，其中

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} 1 & & & a_{1k}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ & \ddots & & \vdots & & \\ & & 1 & a_{k-1,n}^{(k)} & \cdots & a_{k-1,n}^{(k)} \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}, \qquad \vec{b}^{(k)}=\begin{pmatrix} b_1^{(k)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

第*k*步计算步骤

- 消元（1）按列选主元 即确定i_k使 $\left|a_{i_k,k}\right|=\max\limits_{k\le i\le n}\left|a_{ik}\right|$;

  （2）换行 当$i_k\neq k$时，交换$(A,\vec{b})$第k行与第i_k行元素；

  （3）消元计算

- 消元

（1）按列选主元　　即确定i_k使 $\left|a_{i_k,k}\right| = \max\limits_{k\le i\le n}\left|a_{ik}\right|$；

（2）换行　　当$i_k \ne k$时，交换$(A,\vec{b})$第k行与第i_k行元素；

（3）消元计算　　$m_{ik} = -a_{ik}/a_{kk} \quad (i=1,2,\cdots,n\text{且}i\ne k)$,

$$m_{kk} = 1/a_{kk},$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + m_{ik}a_{kj} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,n\text{且}i\ne k \\ j=k+1,\cdots,n \end{pmatrix},$$

$$b_i \leftarrow b_i + m_{ik}b_k \quad (i=1,2,\cdots,n\text{且}i\ne k).$$

（4）计算主行（主元素所在行）

$$a_{kj} \leftarrow a_{kj}\cdot m_{kk}\ (j=k,k+1,\cdots,n) \quad (a_{kj}\leftarrow a_{kj}/a_{kk})$$

$$b_k \leftarrow b_k \cdot m_{kk}$$

上述过程完成后,即 $k=1,2,\cdots,n$,均已完成,则有

- 计算解

$$[A,\vec{b}] \xrightarrow[n\text{步}]{} [A^{(n+1)},\vec{b}^{(n+1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & \bar{b}_1 \\ & 1 & & & \bar{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \bar{b}_n \end{array}\right]$$

$$x_i = \bar{b}_i\,(i=1,2,\cdots,n).$$

优点　不用回代，将**A**化为单位矩阵，则解为常数项列.

缺点　计算量较大，大约是$O(n^3/2)$次乘除法.

说明　在解方程组$A\vec{x}=\vec{b}$时，一般不用高斯$-$约当消去法.

因为计算量太大，但是在解多个方程组而它们的系数矩阵相同时，用此方法，即是求系数矩阵的逆矩阵A^{-1},有了A^{-1}则$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$,

即$A\vec{x}=\vec{b}\overset{G-J\text{消去法}}{\Leftrightarrow}$解$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$.　　**因此，可以用来求逆矩阵.**

定理9　（列主元高斯—约当法求逆矩阵）

设$A\in R^{n\times n}$为非奇异矩阵，**如果用列主元G-J消去法将（*A*，*I*）化为（*I*，*T*），**则$A^{-1}=T$.

注　该方法与高等代数中求逆矩阵方法的不同之处是有选主元，实际上选主元就是交换两行的位置，仍是初等变换，在一般的求逆矩阵方法中也有交换两行元素.

例6 用列主元G-J消去法求 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ 的逆矩阵A^{-1}.

解 $(A,I)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&4&5&0&1&0\\\boxed{3}&5&6&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&5&6&0&0&1\\2&4&5&0&1&0\\1&2&3&1&0&0\end{array}\right]$

$m_{21}=\dfrac{2}{3}$, $m_{31}=\dfrac{1}{3}$, $m_{32}=\dfrac{1}{2}$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-\frac{2}{3}r_1\\ r_3-\frac{1}{3}r_1}]{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}3&5&6&0&0&1\\0&2/3&1&0&1&-2/3\\0&1/3&1&1&0&-1/3\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{3}r_1]{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&5/3&2&0&0&1/3\\0&\boxed{2/3}&1&0&1&-2/3\\0&1/3&1&1&0&-1/3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_2]{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&5/3&2&0&0&1/3\\0&2/3&1&0&1&-2/3\\0&0&1/2&1&-1/2&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{\frac{3}{2}r_2\\ 2r_3}]{}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&5/3&2&0&0&1/3\\0&1&3/2&0&3/2&-1\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 5/3 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1-\frac{5}{3}r_2]{\frac{3}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & -5/2 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1+r_3 \\ r_2-3r_3 \\ 2r_3}]{} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{-1}),$$

所以 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

谢　　谢！