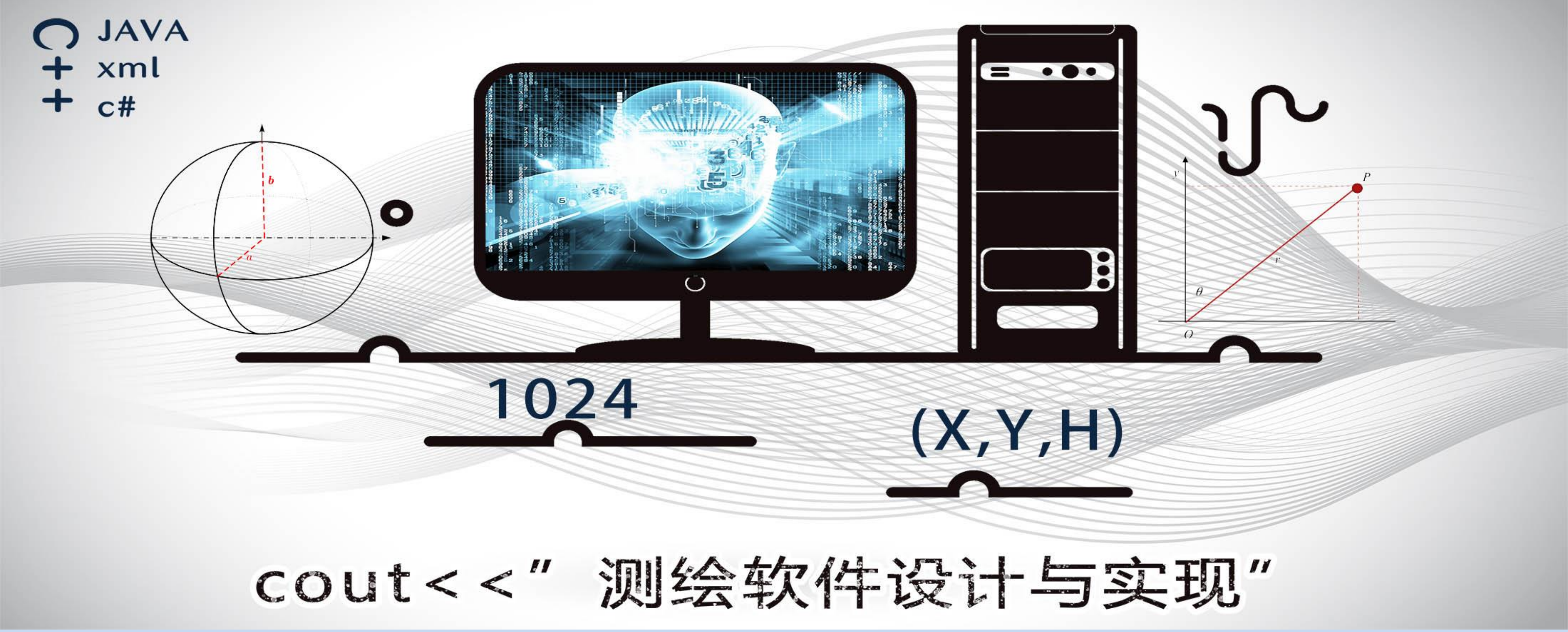


第5章 测量坐标系统转换程序

朱晓峻

Email：zhuxiaojunahu@126.com

QQ：302838249

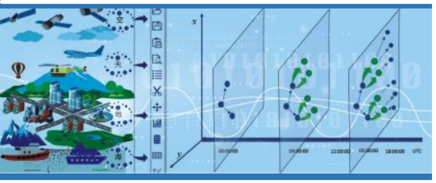
安徽大学 资源与环境工程学院

学习内容

Contents

- 坐标系统转换
- 高斯投影正反算及换带计算

测绘程序设计



5.1 坐标系统转换

- 空间转换理论公式
- 转换参数的解算
- 二维、三维坐标转换程序设计
- 其它坐标转换模型

5.1 坐标系统转换

坐标转换：坐标系转换和坐标基准转换

- 坐标系转换
  - 大地坐标
  - 空间直角坐标
  - 站心坐标
  - 平面坐标
- 坐标基准转换
  - 54坐标
  - 80坐标
  - CGCS2000
  - WGS84

一 空间转换理论公式

- 直角坐标系与大地坐标系参数间的转换

对同一空间点，直角坐标系与大地坐标系参数间有如下转换关系：

$$\begin{cases} X=(N+H)\cos B\cos L \\ Y=(N+H)\cos B\sin L \\ Z=[N(1+e^2)+H]\sin B \end{cases}$$

直接算法 $\left\{\begin{array}{l} L=\arctan(Y/X) \\ B=\arctan\{Z(N+H)/[\sqrt{X^2+Y^2}(N(1-e^2)+H)]\} \\ H=Z/\sin B-N(1-e^2) \end{array}\right\}$

式中，$N=a/\sqrt{1-e^2\sin^2 B}$，N为该点的卯酉圈半径；

$e^2=(a^2-b^2)/a^2$，a,e分别为该大地坐标系对应椭球的长半径和第一扁心率。

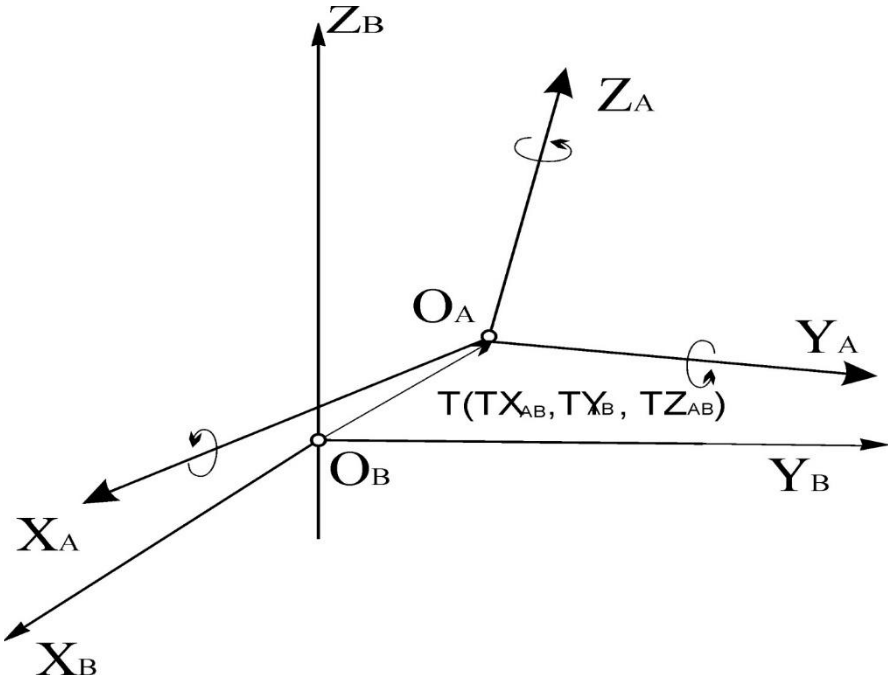
空间转换理论公式

- 布尔莎七参数模型

✓ 三个平移参数

✓ 三个旋转参数

✓ 一个尺度参数



空间转换理论公式

- 布尔莎七参数模型

$$X_B = \Delta X + (1+m)R(\varepsilon_X)R(\varepsilon_Y)R(\varepsilon_Z)X_A$$

式中

$$X_A = (x_A, y_A, z_A)^T, X_B = (x_B, y_B, z_B)^T, \Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$$

$$R(\varepsilon_X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_X & \sin\varepsilon_X \\ 0 & -\sin\varepsilon_X & \cos\varepsilon_X \end{bmatrix} \qquad R(\varepsilon_Y) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Y & 0 & -\sin\varepsilon_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varepsilon_Y & 0 & \cos\varepsilon_Y \end{bmatrix}$$

$$R(\varepsilon_Z) = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon_Z & \sin\varepsilon_Z & 0 \\ -\sin\varepsilon_Z & \cos\varepsilon_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

我们将 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$（前三个为平移参数），m（尺度参数），$\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$（后三个为旋转参数）称为坐标系间的转换参数，习惯上简称转换参数，其中三个旋转矩阵的形式稍微不同是因为测量坐标系与数学坐标系方向不同的原因。

空间转换理论公式

- 二维坐标转换

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = (1+m)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \frac{1}{(1+m)}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B - \Delta x \\ y_B - \Delta y \end{bmatrix}$$

转换参数的解算

- 参数求解的一般形式

WGS—84坐标系 ⇨ 北京—54

模型含有7个未知数，参数求解至少需要列7个方程，因此至少需要有2个平高控制点和1个高程点，而且三个控制点不能在一条直线上。当有多余观测时，应按最小二乘法解求。

转换参数的解算

• 参数求解的一般形式

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial F}{\partial \omega_X} d\omega_X + \frac{\partial F}{\partial \omega_Y} d\omega_Y + \frac{\partial F}{\partial \omega_Z} d\omega_Z + \frac{\partial F}{\partial \Delta X} d\Delta X + \frac{\partial F}{\partial \Delta Y} d\Delta Y + \frac{\partial F}{\partial \Delta Z} d\Delta Z$$

一般ω_X、ω_Y和ω_Z均为小角度，$\cos\omega \approx 1$、$\sin\omega \approx \omega$，式（4-1-1）可近似值表示为：

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} + (1+m) \begin{bmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix}$$

对上式线性化展开，取一次项得：

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} d\lambda & d\omega_Z & -d\omega_Y \\ -d\omega_Z & d\lambda & d\omega_X \\ d\omega_Y & -d\omega_X & d\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\Delta x \\ d\Delta y \\ d\Delta z \end{bmatrix}$$

转换参数的解算

把坐标 A 看作观测值，其改正数为 v_x、v_y、v_z，写成误差方程形式得：

$$-\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_A & 0 & -z_A & y_A \\ 0 & 1 & 0 & y_A & z_A & 0 & -x_A \\ 0 & 0 & 1 & z_A & -y_A & x_A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Delta x \\ d\Delta y \\ d\Delta z \\ d\lambda \\ d\omega_X \\ d\omega_Y \\ d\omega_Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

式中

$$\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \\ \Delta z_0 \end{bmatrix}$$

对于每一平高点，可按上式列出一组误差方程式，若有n个平高控制点，可列出n组误差方程式，组成法方程式，经解算后得到初始值改正数，加到初始值上得到新的近似值。将此新的近似值再次作为初始值，重复上述求解过程，如此循环趋近，直到改正数小于规定的限差为止，最后求出转换参数。

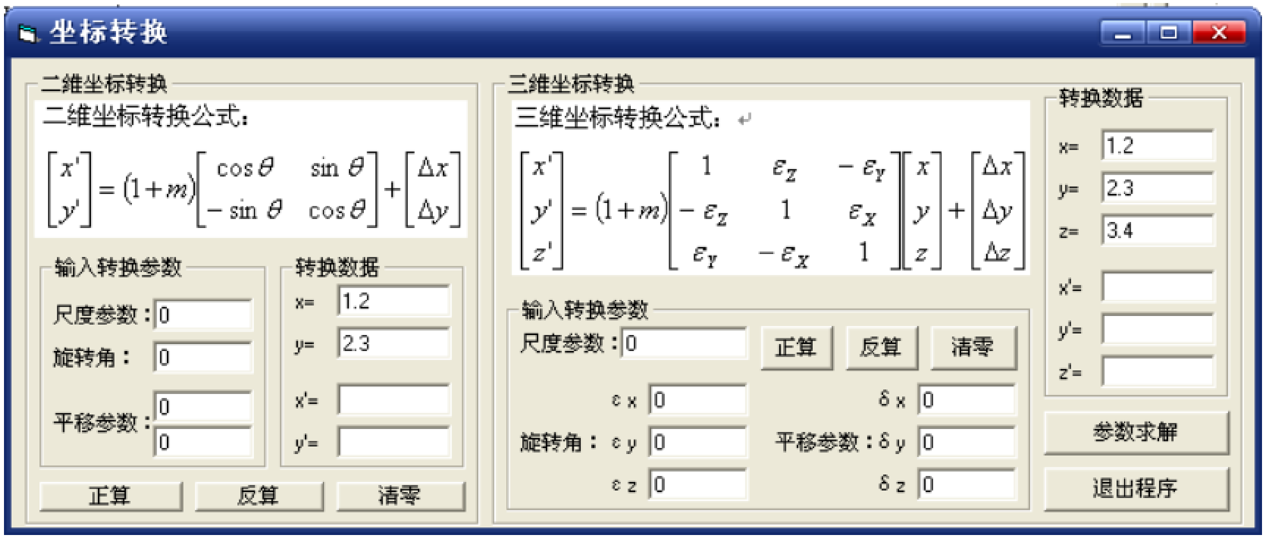
程序设计

1）程序结构与界面设计

程序主要功能：二维、三维坐标变换；

二维、三维转换参数求解。

依据程序功能，程序划分为坐标变换窗体、参数求解窗体和主要计算函数模块。图4-1为坐标转换窗体，图4-2为参数求解窗体。



程序设计

只要在该窗体中输入相应转换参数，按相应按钮就可以实现两套坐标系间的相互转换，但注意二维坐标转换旋转角可以为任意角度值，三维转换仅满足角度值为一小角（<3°）的情况，适合测量坐标转换的实际情况。程序设置该窗体为主窗体，转换参数的求解需要按“参数求解”按钮来启动。

图4-2 转换参数求解窗体

参数求解坐标数据写在文本文件中，单选框确定二维还是三维转换参数求解，通过“打开”按钮定位文件，“读入并计算”按钮把数据读入数组并调用模块中相应函数完成计算，计算结果显示在相应文本框中。

主要的运算函数统一写在模块中，主要包括角度-弧度互换函数、矩阵基本运算函数、线性方程组求解函数。这些函数在第二章已有详细代码，本节不再重复。

其它坐标转换模型

- ## 二维平面基准转换

（1）二参数转换：坐标概略换算，仅考虑平移。

（2）三参数转换：考虑平移和旋转。

（3）四参数转换：包括正形转换（ConformalTransformation）和Helmert转换。

（4）六参数转换：仿射转换（AffineTransformation），一般地籍图坐标转换常用。

（5）二次多项式转换。

一

其它坐标转换模型

- 三维空间基准转换

（1）三参数转换：平移参数，其实是七参数法在小范围（最远距离<30km）的简化。

（2）四参数转换。

（3）七参数转换：主要有Bursa-Wolf模式和Molodensky-Badeka模式两种，另外武汉测绘科技大学曾推出了武测模型，其实三种模型是等价的。

（4）十参数转换（Krakiwsky-ThomsonTransformation ）

（5）多项式转换（MRE： MultipleRegressionEquation 复回归法)

（6）二阶段基准转换法

其它坐标转换模型

- 曲面拟合模式

（1）最小曲率法(MinimumCurvatureInterpolation)

（2）最小二乘配置法 (LeastSquaresCollocation)

（3）全区多项 式法 (GlobalPolynomial)

（4）克力金法(Kriging)

其它坐标转换模型

• 大欧拉角（旋转角）的空间直角坐标转换

（1）基于罗德里格矩阵（RodrigoMatrix）的坐标变换：以布尔莎模型为基本变换模型，用罗德里格矩阵代替旋转矩阵，由于罗德里格矩阵的三个参数为标量不受角度的周期性影响，适合大欧拉角的坐标变换。

（2）基于改进的高斯- 牛顿法的非线性三维直角坐标转换法

（3）基于方向余弦参量的物坐标系与世界坐标系之间的变换

（4）三维坐标转换的非线性模型

其它坐标转换模型

- 高程转换

(1) 不同参考面的高程转换

当前我国高程测量中存在着三种高程系统：正常高、正高和大地高

(2) 同参考面的高程转换

1985 年国家高程基准高程=1956 年黄海高程-0.029m 。1985年国家高程基准已于 1987 年5 月开始启用，

1956 年黄海高程系同时废止。

各高程系统之间的关系

56黄海高程基准：+0.000

85高程基准（最新的黄海高程）：56 高程基准-0.029

吴淞高程系统：56 高程基准 +1.688

珠江高程系统：56 高程基准 -0.586

5.2 高斯投影正反算及换带计算

- 高斯投影正反算数学模型
- 高斯投影正反算程序设计

高斯投影正反算数学模型

- ## 椭球基本元素

决定椭球的大小和形状，一般有下列几个元素：

椭球的长半轴 a

椭球的短半轴 b

椭球的扁率 $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$

椭球的第一偏心率 $e^2 = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$

椭球的第二偏心率 $e'^2 = \dfrac{a^2-b^2}{b^2}$

辅助量 $c = \dfrac{a^2}{b}$

$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B} \;,\quad V = \sqrt{1+e'^2\cos^2 B}$$

高斯投影正反算数学模型

• 椭球基本元素

常用的一些椭球及参数

海福特椭球(1910) 我国 52 年以前基准椭球

a=6378388m，b=6356911.9461279m，α=0.33670033670

克拉索夫斯基椭球(1940 Krassovsky) 北京 54 坐标系基准椭球

a=6378245m，b=6356863.018773m，α=0.33523298692

1975 年 I.U.G.G 推荐椭球(国际大地测量协会 1975) 西安 80 坐标系基准椭球

a=6378140m，b=6356755.2881575m，α=0.0033528131778

WGS-84 椭球(GPS 全球定位系统椭球、17 届国际大地测量协会) WGS-84 GPS 基准椭球

a=6378137m，b=6356752.3142451m，α=0.00335281006247

高斯投影正反算数学模型

- ## 高斯投影正算

由大地经度 L 和纬度 B 换算到高斯平面坐标 x，y 的计算公式为：

$$\left.\begin{aligned} x &= X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 \\ y &= a_1 l + a_3 l^3 + a_5 l^5 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

式中，l=L-L_0单位为弧度，a_i (i = 1，2，……，6) 是纬度的函数，X是中央子午线弧长，相应计算公式为：

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= N\cos B \\ a_2 &= \frac{N}{2}\sin B\cos B \\ a_3 &= \frac{N}{6}(1-\tan^2 B + e'^2\cos^2 B)\cos^3 B \\ a_4 &= \frac{N}{24}\tan B(5-\tan^2 B + 9e'^2\cos^2 B + 4e'^4\cos^4 B)\cos^4 B \\ a_5 &= \frac{N}{120}(5-18\tan^2 B + \tan^4 B + 14e'^2\cos^2 B - 58e'^2\cos^2 B\tan^2 B)\cos^5 B \\ a_6 &= \frac{N}{720}\tan B(61-58\tan^2 B + \tan^4 B + 270e'^2\cos^2 B - 330e'^2\cos^2 B\tan^2 B)\cos^6 B \\ N &= a/\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)} \end{aligned}\right\}$$

高斯投影正反算数学模型

• 高斯投影正算

中央子午线弧长X是计算的关键，原计算公式如下：

$$X=\alpha B+\beta\sin 2B+\gamma\sin 4B+\delta\sin 6B+\varepsilon\sin 8B+\xi\sin 10B+\ldots\ldots$$

精确到前6位，精度就可达到0.001m，取前6位上式可写成：

$$X=b_0B+\sum^{5}b_i\sin(2iB)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
b_0&=a(1-e^2)(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8+\frac{43659}{65536}e^{10}+\ldots\ldots)\\
b_1&=-\frac{1}{2}a(1-e^2)(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8+\frac{72765}{65536}e^{10}+\ldots\ldots)\\
b_2&=\frac{1}{4}a(1-e^2)(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8+\frac{10395}{16384}e^{10}+\ldots\ldots)\\
b_3&=-\frac{1}{6}a(1-e^2)(\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e^8+\frac{31185}{13072}e^{10}+\ldots\ldots)\\
b_4&=\frac{1}{8}a(1-e^2)(\frac{315}{16384}e^8+\frac{3465}{65536}e^{10}+\ldots\ldots)\\
b_5&=-\frac{1}{10}a(1-e^2)(\frac{693}{131072}e^{10}+\ldots\ldots)\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}\right\}$$

高斯投影正反算数学模型

- 高斯投影反算

根据一点的平面坐标计算大地坐标，即高斯投影反算的公式如下：

$$\left.\begin{aligned} B &= b_0 + b_2 y^2 + b_4 y^4 + b_6 y^6 + \ldots \\ l &= b_1 y + b_3 y^3 + b_5 y^5 + \ldots \end{aligned}\right\}$$

式中

$$\begin{cases} b_0 = B_f \\ b_1 = \dfrac{1}{N_f \cos B_f} \\ b_2 = -\dfrac{1}{2M_f N_f} \tan B_f \\ b_3 = -\dfrac{1}{6N_f^3 \cos B_f}(1 + 2\tan^2 B_f + e'^2 \cos^2 B_f) \\ b_4 = \dfrac{1}{24M_f N_f^3} \tan B_f (5 + 3\tan^2 B_f + e'^2 \cos^2 B_f - 9e'^2 \cos^2 B_f \tan^2 B_f) \\ b_5 = \dfrac{1}{120N_f^5 \cos B_f}(5 + 28\tan^2 B_f + 24\tan^4 B_f + 6e'^2 \cos^2 B_f + 8e'^2 \cos^2 B_f \tan^2 B_f) \\ b_6 = -\dfrac{1}{720M_f N_f^5} \tan B_f (61 + 90\tan^2 B_f + 45\tan^4 B_f) \end{cases}$$

其中 B_f 为底

高斯投影正反算数学模型

• 高斯投影反算

点纬度、M_f 为底点的子午圈曲率半径、N_f 为卯酉圈曲率半径。

$M_f = \frac{c}{V^3}$、$N_f = \frac{c}{V}$ 两者的求解都需要知道底点纬度，因此对 B_f 的求解成为关键，本节采用以下迭代公式求解：

$$\begin{cases} B_f^{(0)} = 0 \\ B_f^{(j+1)} = \dfrac{1}{b_0}\left(X - \sum_{i=1}^{4} b_i \sin 2iB_f^j\right) \qquad (j = 0,1,\ldots,8) \end{cases}$$

其中，x=X，即中央子午线的子午弧长。

高斯投影正反算数学模型

• 换带计算和临带计算

换带计算分为两种情况：

一是3 度带与6度带之间的高斯投影换带；

一是不同带间由一个带的高斯投影换算到另一投影带的高斯坐标 （ 可是标准分带， 也可是非标准分带 ） 。

两种方法过程一致， 都要先由xy坐标经高斯投影反算求得大地坐标B、 L，然后应用高斯投影正算， 求得指定带 （根据带号或中央子午线精度） 的高斯坐标。 只不过第一种换带不需要指定带， 而由坐标获取带号， 并根据选定的分带情况计算。

临带计算的过程和换带计算基本一致，只不过是把换带计算的带限定到相邻的带，是换带计算的一种特殊情况。

换带和临带计算并不要增加新代码，利用前面的高斯投影正反算过程即可实现。

高斯投影正反算程序设计

- 功能分析和界面设计

  ① 程序应具备基本的高斯投影正反算、换带与临带计算功能；

  ② 程序应通用性好，能适应于不同的椭球；

  ③ 程序不仅要具备单点计算功能，还要能批量处理数据；

  ④ 程序界面要简洁，还需具备一定的容错功能。

- 程序界面设计